

Crossovers Passivos, de 2ª Ordem, em Sistemas Duas Vias

Homero Sette Silva, Eng.
www.selenium.com.br

Os conceitos envolvidos no projeto e utilização de crossovers passivos de 12 dB/Oitava, com resistor de atenuação na via de altas frequências, são revistos em detalhe e tabelas são fornecidas.

Introdução

Os circuitos divisores de frequência, aplicados aos alto-falantes, também denominados crossovers (devido ao cruzamento das respostas das vias adjacentes) podem ser ativos ou passivos. Os do tipo ativo geralmente utilizam amplificadores operacionais e dispensam o uso de indutores enquanto que os passivos empregam resistores, indutores e capacitores.

Embora as inúmeras e indiscutíveis vantagens dos ativos (que não vamos aqui enumerar), existem situações onde os passivos são os preferidos, por razões de custo, facilidade de operação e redução de peso e volume do equipamento.

Com o advento dos drivers de titânio, os sistemas a duas vias ganharam importância ainda maior.

A idéia básica consiste em filtrar o sinal de áudio, de modo que somente as frequências adequadas a cada transdutor sejam a eles aplicadas. Assim, em um sistema duas vias, se estipularmos a frequência de corte em 1200 Hz, apenas as frequências acima desse valor serão encaminhadas para o driver, enquanto que aquelas, abaixo da frequência de corte, irão para o alto-falante.

Neste procedimento, os sinais que foram separados, de modo a serem reproduzidos por vias diferentes, deverão, em termos ideais, reproduzir perfeitamente o sinal original, após a superposição no meio ambiente. Este quesito, que é difícil de ser satisfeito, até em um sistema puramente eletrônico, sem irradiação pelo ar, torna-se algo extremamente difícil de ser atingido quando a propagação pelo ar faz parte do sistema, o que geralmente acontece nas sonorizações convencionais.

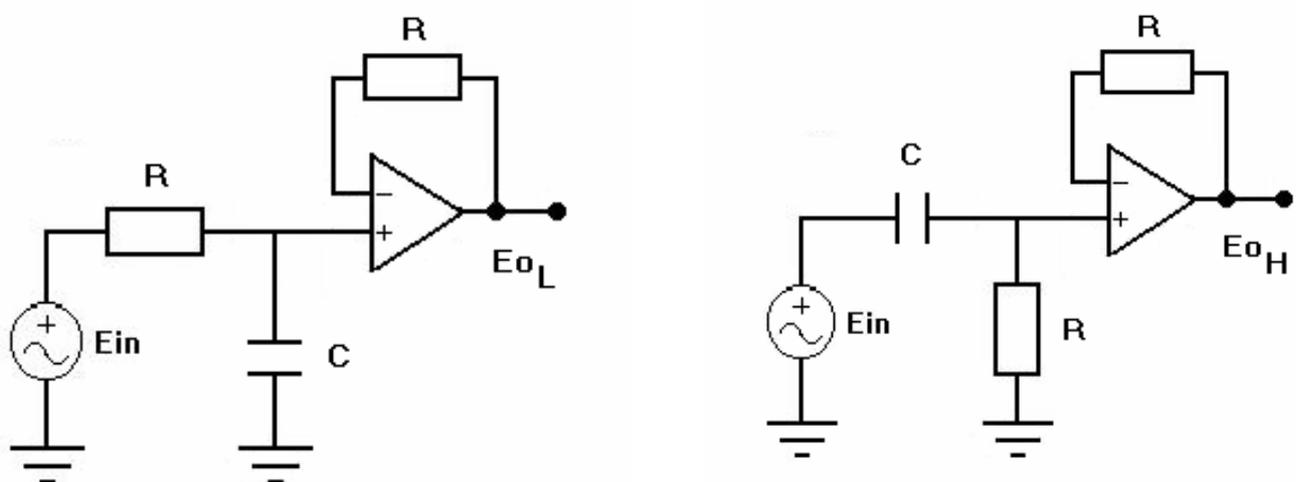


Fig. 1 – Circuitos passa-baixas e passa-altas de primeira ordem (6 dB/Oitava).

Para ilustrar o que foi dito, vejamos os circuitos passa-altas e passa-baixas, de primeira ordem da Fig. 1, onde os amplificadores operacionais foram utilizados para tornar o circuito imune a variações de impedância.

$$E_{OH} = \frac{E_{in}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot R = E_{in} \cdot \frac{s \cdot RC}{s \cdot RC + 1} = E_{in} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = E_{in} \cdot \frac{s}{s + \omega_0}$$

$$E_{OL} = \frac{E_{in}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot \frac{1}{s \cdot C} = E_{in} \cdot \frac{1}{s \cdot RC + 1} = E_{in} \cdot \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = E_{in} \cdot \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

$$E_{OH} = E_{in} \cdot \frac{s}{s + \omega_0} \quad ; \quad E_{OL} = E_{in} \cdot \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \quad , \quad \text{onde } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Somando a resposta passa-baixas com a passa-altas, o que pode ser feito com o somador subtrator mostrado na Fig. 2, teremos reconstituído o sinal de entrada, original.

$$E_{OL} + E_{OH} = E_{in} \cdot \frac{\omega_0}{s + \omega_0} + E_{in} \cdot \frac{s}{s + \omega_0} = E_{in} \cdot \frac{\omega_0 + s}{s + \omega_0} = E_{in}$$

Este resultado, aparentemente trivial, não se repetirá nos circuitos de segunda ordem, que analisaremos mais adiante.

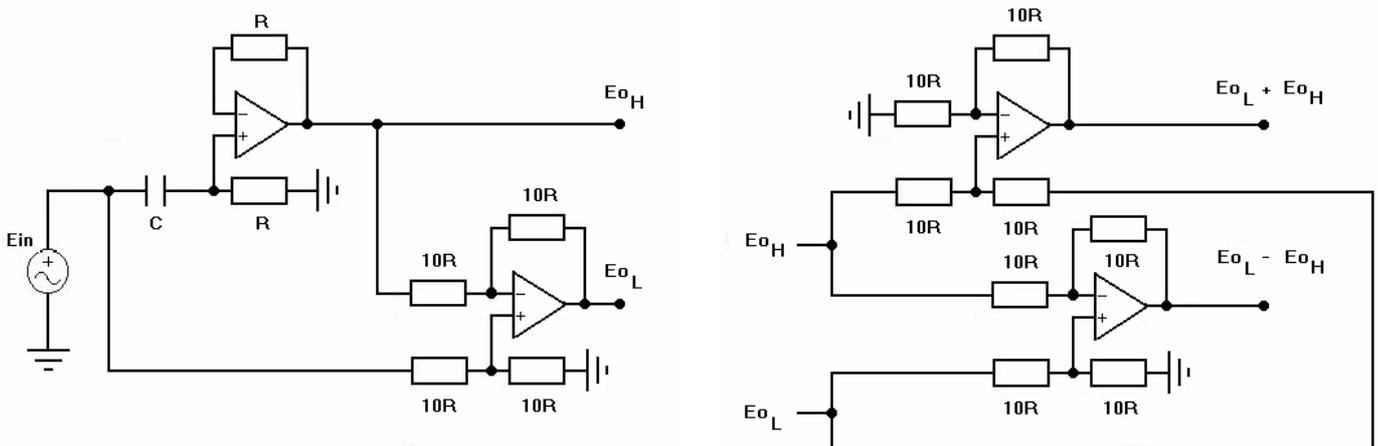


Fig. 2 – Respostas passa-altas e passa-baixas geradas a partir de um único circuito RC. Somador subtrator para obtenção das respostas soma e diferença de cada uma das vias.

Ainda enfocando a primeira ordem, se invertermos a fase da via de altas frequências, ou seja, subtrairmos a resposta passa-altas da passa-baixas, não mais teremos o resultado acima. A superposição dar-se-á apenas quanto ao módulo do sinal, ou seja, somente em regime permanente, o que não engloba os transientes, aspecto dominante nos sinais musicais.

$$E_{OL} - E_{OH} = Ein \cdot \frac{\omega_0}{s + \omega_0} - Ein \cdot \frac{s}{s + \omega_0} = Ein \cdot \frac{\omega_0 - s}{s + \omega_0}$$

Substituindo s por $j\omega$, e obtendo o módulo, vemos que a superposição da diferença das vias acontece em regime permanente senoidal.

$$E_{OL} - E_{OH} = Ein \cdot \frac{\omega_0 - j\omega}{\omega_0 + j\omega} \quad \therefore \quad |E_{OL} - E_{OH}| = Ein \cdot \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} = Ein$$

$$\Theta = -2 \cdot \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad ; \quad \tau_f = -\frac{\Theta}{\omega} = \frac{2 \cdot \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\omega} \quad ; \quad \tau_{f_N} = \tau_f \cdot \omega_0$$

Esta situação caracteriza os circuitos denominados passa-tudo, onde a amplitude do sinal mantém-se inalterada e a fase varia conforme a frequência.

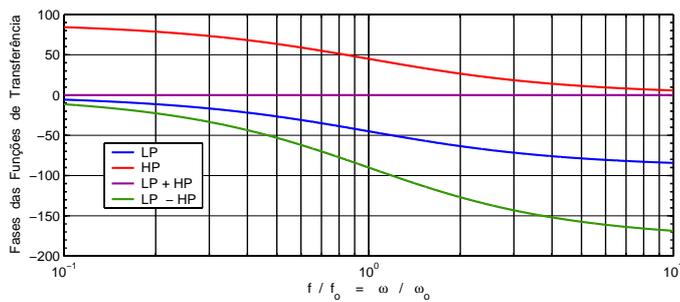


Fig. 3 – Fases das diferentes respostas de primeira ordem.

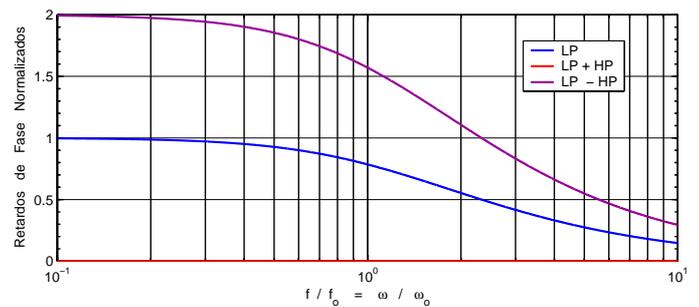


Fig. 4 – Retardos de fase τ_{f_N} das respostas.

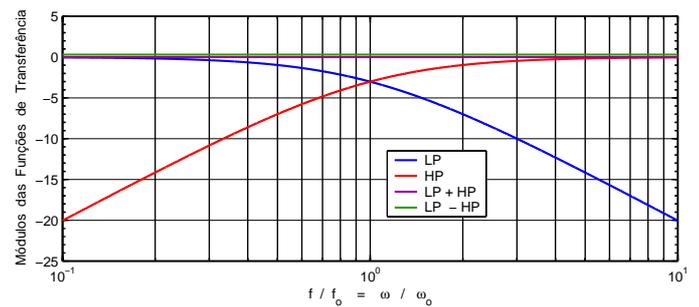
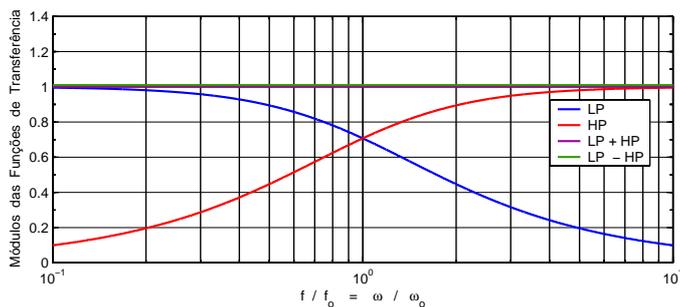


Fig. 5 – Módulos das diversas respostas de primeira ordem, em escalas linear e logarítmica, respectivamente.

Uma consequência prática disso, é que uma onda complexa na entrada, como a quadrada, por exemplo, será reconstituída perfeitamente ao somarmos as saídas passa-altas e passa-baixas, pois a fase, neste caso é constante e igual a zero. No caso da diferença (soma invertida) a variação de fase imposta ao sinal vai alterar radicalmente seu aspecto, conforme podemos ver na Fig. 9.

Inicialmente, vamos ilustrar o que foi dito acima com um sinal de entrada mais simples, em termos de conteúdo harmônico, composto por duas senóides, com amplitudes unitárias e frequências uma o dobro da outra.

$$E_{in_1} = \text{sen}(t) \quad ; \quad E_{in_2} = \text{sen}(2 \cdot t)$$

$$E_{in} = E_{in_1} + E_{in_2} \quad \therefore \quad E_{in} = \text{sen}(t) + \text{sen}(2 \cdot t)$$

$$E_{o_1} = \text{sen}(t + \Theta_1) \quad ; \quad E_{o_2} = \text{sen}(2 \cdot t + \Theta_2)$$

$$E_o = E_{o_1} + E_{o_2} \quad \therefore \quad E_{in} = \text{sen}(t + \Theta_1) + \text{sen}(2 \cdot t + \Theta_2)$$

$$\Theta_1 = -2 \cdot \text{tg}^{-1}(1) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ \quad ; \quad \Theta_2 = -2 \cdot \text{tg}^{-1}(2) = -2,214 \text{ rad} = -126,9^\circ$$

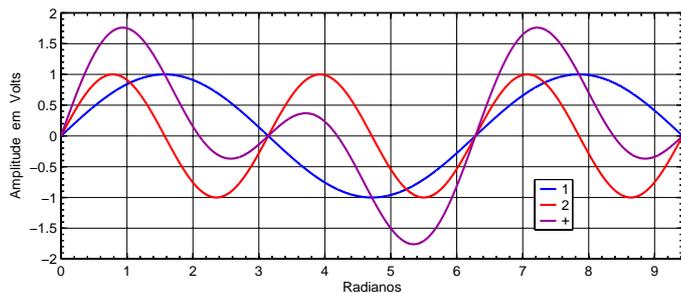


Fig. 6 – Sinais na entrada do circuito passa-tudo.

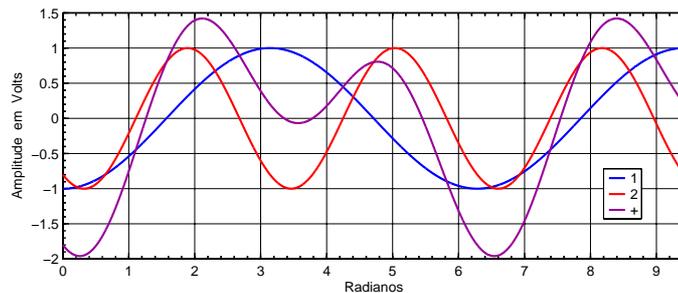


Fig. 7 – Sinais na saída do circuito passa-tudo.

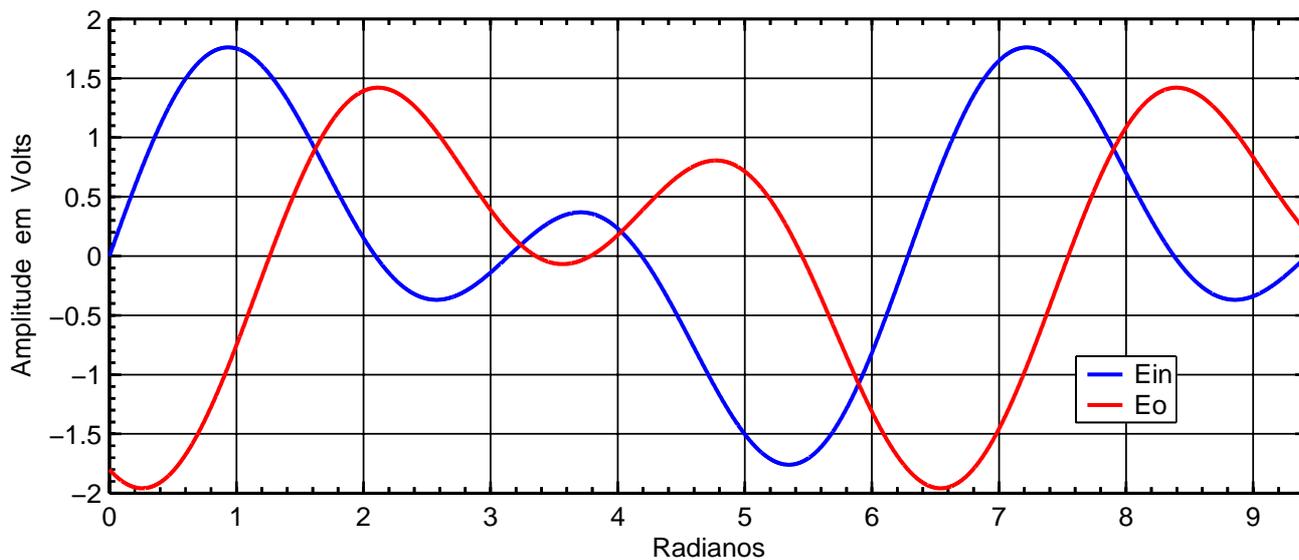


Fig. 8 – Sinais resultantes na entrada e na saída do circuito passa-tudo, mostrando o efeito do defasamento.

No circuito da Fig. 2 foi aplicada uma onda quadrada com 0,5 Volt de pico e fundamental igual a 1 kHz.

Os Componentes do circuito assumiram os valores $R = 15 \text{ K}\Omega$ e $C = 0,01 \mu\text{F}$, o que dá uma frequência de cruzamento igual a 1061 Hz, ou seja, praticamente 1 kHz.

A Fig. 9 mostra as formas de onda encontradas nos pontos de interesse, do circuito, onde podemos ver que a soma das respostas passa-baixas e passa-altas reproduziu perfeitamente o sinal de entrada enquanto que a diferença entre eles produziu um sinal bem diferente da onda quadrada na entrada.

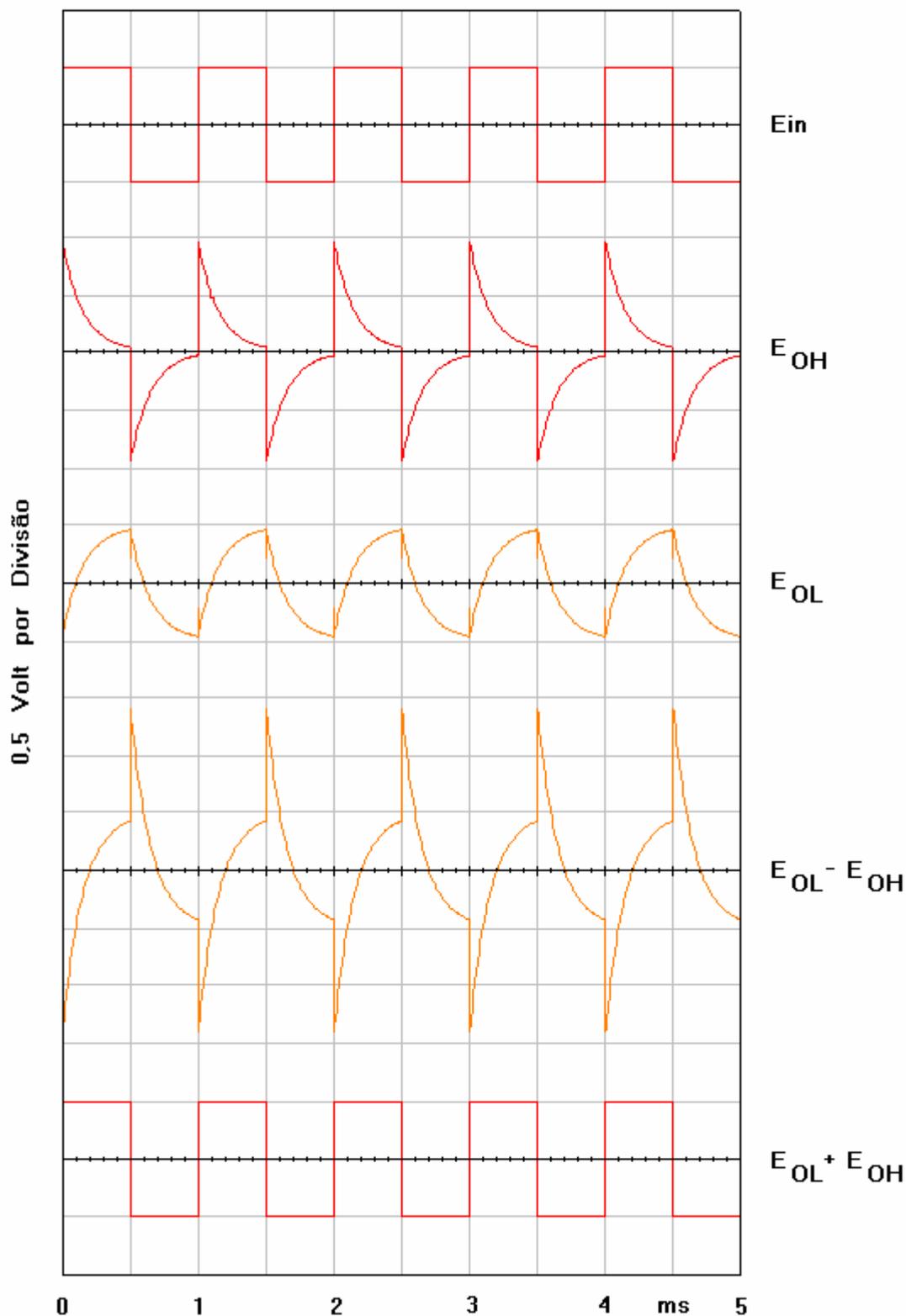


Fig. 9 – Formas de onda em um crossover de primeira ordem, com o corte em 1 kHz, alimentado por uma onda quadrada também de 1 kHz e 0,5 V de pico.

O sinal E_{OH} , ou seja, aquele na saída da via passa-altas, possui um valor de pico duas vezes maior que o da via passa-baixas. Desse modo, o driver (ou tweeter) receberá uma potência máxima quatro vezes maior que a aplicada no falante, o que é um fato digno de nota e que deve ser levado em conta.

Respostas ao Degrau e ao Impulso

O degrau unitário é uma excitação que vale 1 para instantes de tempo iguais ou maiores que zero, sendo nula para instantes de tempo menores que zero.

Em um alto-falante, isto poderia ser visualizado como uma tensão de 1 Volt aplicada na bobina em $t = 0$.

A derivada do degrau unitário origina uma outra função denominada impulso unitário, que em $t = 0$ possui amplitude infinita. Este sinal, de amplitude infinita e duração nula, possui área unitária, ou seja, o produto infinito x zero, nesse caso, é determinado e igual a um.

O impulso unitário pode também ser entendido como o resultado do somatório de um numero infinito de componentes cosenoidais, de diferentes frequências, todas em fase na origem, que se anulam para $t \neq 0$.

Desse modo, a resposta ao impulso, na saída de um sistema, retrataria sua resposta de frequência e de fase. Embora irrealizável na prática, suas aproximações são úteis, como nos verificadores de polaridade.

O MatLab foi utilizado na obtenção das respostas ao degrau e ao impulso (ver apêndice).

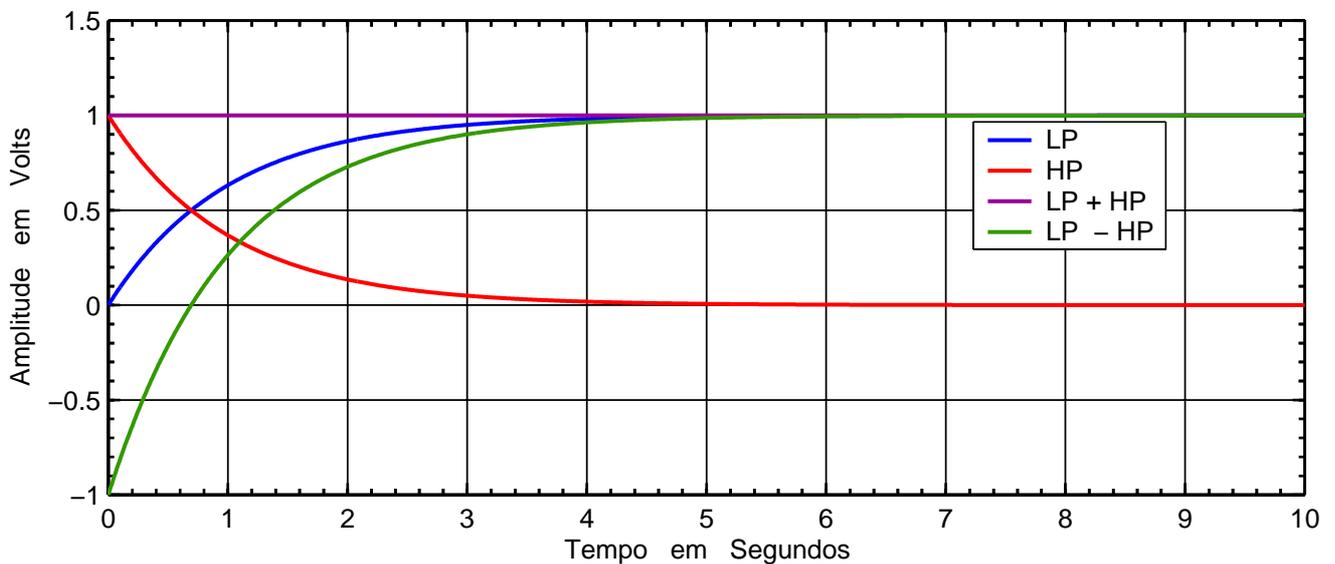


Fig. 10 – Respostas ao degrau unitário em um crossover de primeira ordem.

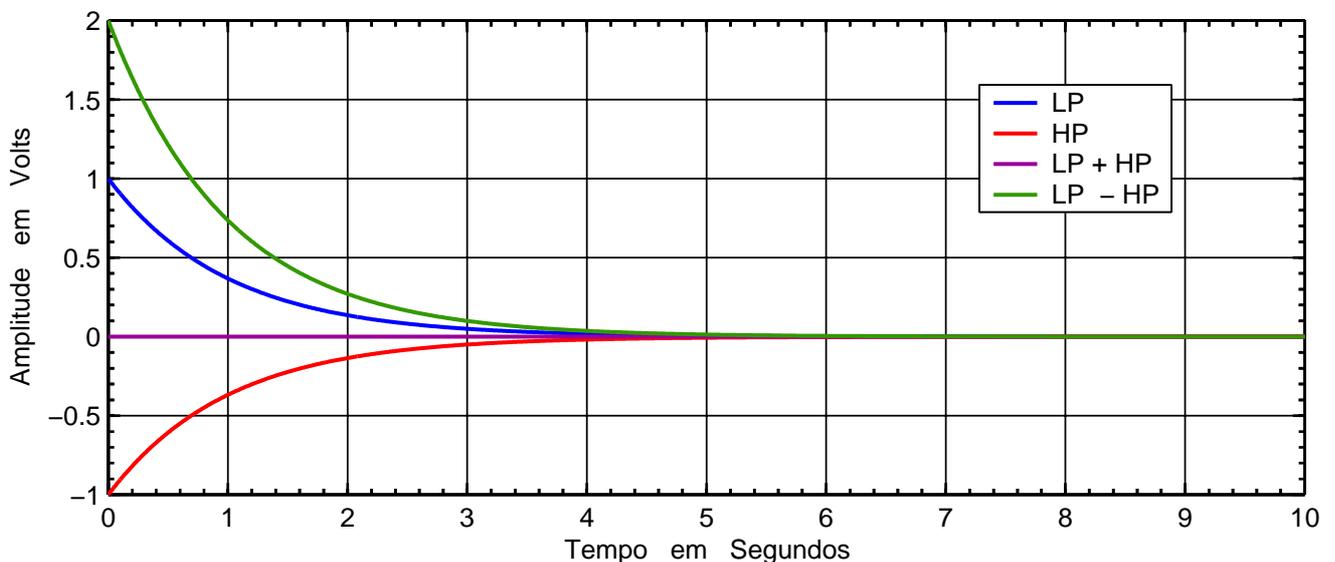


Fig. 11 – Respostas ao impulso unitário em um crossover de primeira ordem.

Segunda Ordem, Duas Vias

A Fig. 12 mostra os circuitos das seções passa-altas e passa baixas, de um crossover passivo, para duas vias, com uma taxa de atenuação de 12 dB por oitava. Nessa topologia podemos implementar filtros de diversas características, como aqueles definidos pelos polinômios de Bessel, Butterworth, Linkwitz-Riley e Chebychev, por exemplo.

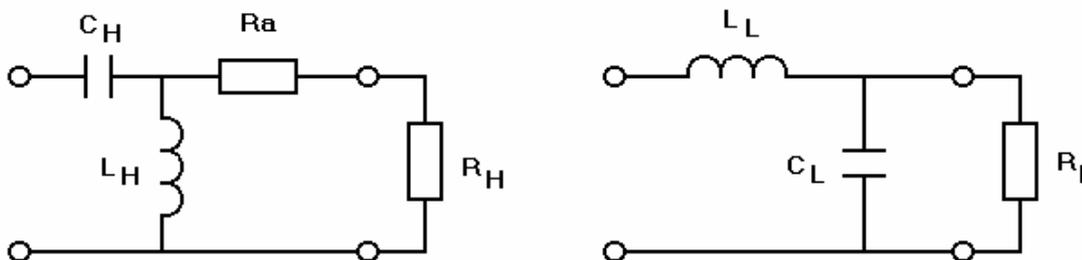


Fig. 12 – Seção Passa-Altas (HP) e Passa-Baixas (LP) de um crossover de segunda ordem.

Como o filtro passa-altas, na maioria das vezes, alimentará drivers ou tweeters, que são, normalmente, muito mais eficientes que os alto-falantes, torna-se quase indispensável a inclusão de um resistor de atenuação em série com o driver, que cumpre dupla finalidade:

- 1) Evitar a queima do driver devido aos elevados níveis de potência exigidos pelos falantes;
- 2) Equalizar a resposta em amplitude do driver, em relação à do falante.

Este resistor, denominado R_a , está em série com o driver ou tweeter, cuja impedância é representada por R_H , sendo geralmente considerada igual a 4, 8 ou 16 ohms, o que é uma simplificação da realidade, uma vez que esta impedância varia com a frequência. Um detalhe muito importante, que não pode ser esquecido: este resistor deve ser levado em conta no cálculo do crossover e influi no valor dos componentes do filtro, conforme mostra a Tabela 1.

O Atenuador

O atenuador consiste em um resistor R_a , associado em série com o transdutor de altas frequências (daí o índice $_H$, de high frequency), simplificada e representado por uma resistência R_H , geralmente sua impedância nominal. O valor da resistência total, R , não só determinará a atenuação desejada, conforme as equações abaixo, como também influenciará nos valores dos demais componentes, conforme a Tabela 1.

$$R = R_a + R_H \quad ; \quad A_{(dB)} = 20 \cdot \text{Log} \left(\frac{R}{R_H} \right) \quad ; \quad R_a = R_H \cdot \left[-1 + 10^{\frac{A_{(dB)}}{20}} \right]$$

Se quisermos determinar o valor do resistor R_a , capaz de atenuar 7 dB um driver ou tweeter, com 8 ohms de impedância nominal, basta entrar na escala vertical da Fig. 13, com o valor 7, e daí traçar uma linha paralela ao eixo horizontal, até interceptar a curva (vermelha) correspondente a $R_H = 8$ Ohms, obtendo então o valor $R_a = 10$ Ohms, no eixo horizontal.

Para entendermos o significado de uma atenuação de 7 dB, vamos entrar com este valor na curva da Fig. 14, obtendo, na interseção com a curva (azul), relativa a P_2 / P_1 , o valor 0,2. Isto significa que a potência no driver de 8 Ohms é 20% daquela que seria aplicada sem o resistor R_a . Assim sendo, uma potência de 250 Watts vai transformar-se em apenas 50 Watts. Se um falante com 8 Ohms de impedância for colocado em paralelo com o driver atenuado, o amplificador poderá fornecer 250 Watts ao falante, sem danificar o driver, pois este estaria recebendo 25 Watts.

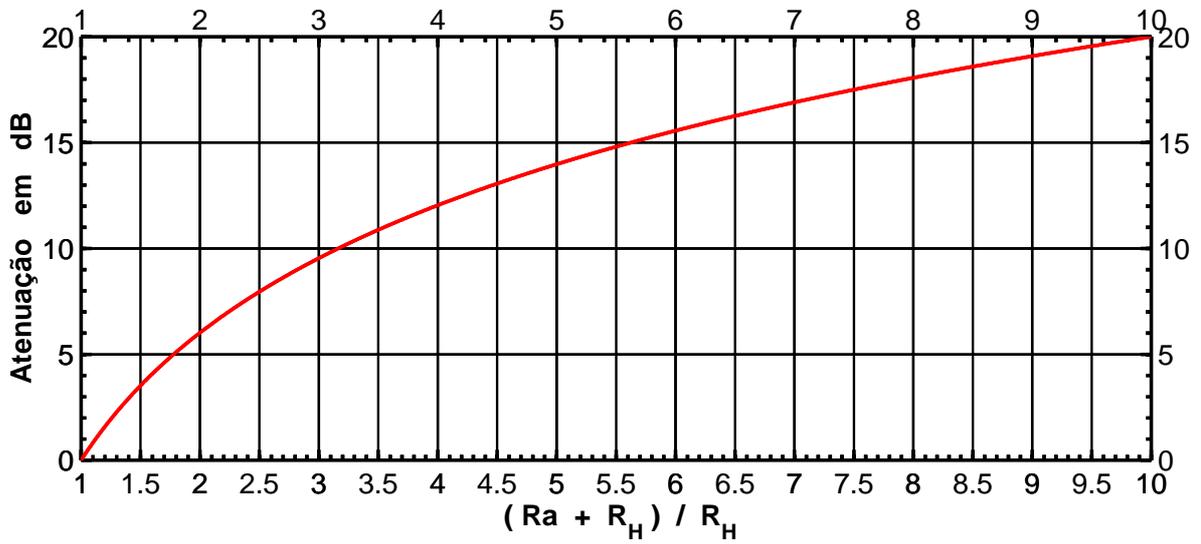


Fig. 13 – Atenuação em dB em função dos valores de R_a e da impedância R_H

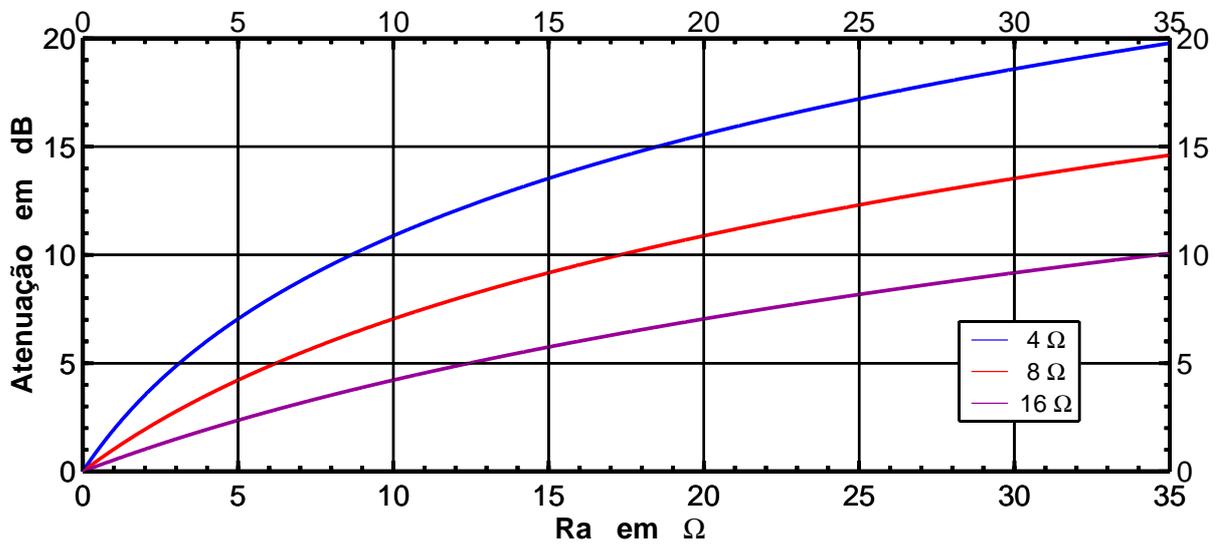


Fig. 14 – Atenuação em dB em função dos valores de R_a para impedâncias R_H iguais a 4, 8 e 16 Ohms.

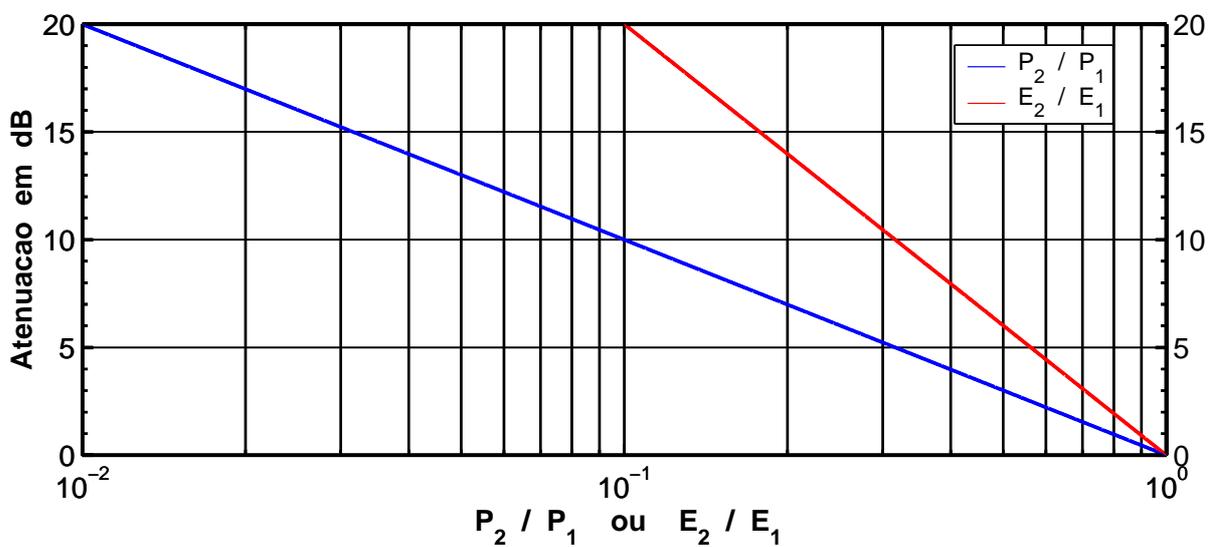


Fig. 15 - Atenuação em dB e as correspondentes relações entre potências e tensões.

Funções de Transferência de Segunda Ordem

As funções de transferência passa-altas e passa-baixas, de segunda ordem, representadas por $\text{GH}_{(s)}$ e $\text{GL}_{(s)}$, respectivamente, assumem as formas gerais mostradas abaixo, onde:

K = Ganho em baixas frequências, muitas vezes igual a 1

Q = Fator de qualidade dos pólos

$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot F_0$ = Frequência angular de cruzamento, em rad/s

F_0 = Frequência de cruzamento, em Hz

$s = \sigma + j\omega$ = variável complexa onde $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

$$\text{GH}_{(s)} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} \quad ; \quad \text{GL}_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$\text{GH}_{(j\omega)} = \frac{-K \cdot \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \cdot \frac{\omega_0}{Q}} \quad ; \quad \text{GL}_{(j\omega)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \cdot \frac{\omega_0}{Q}}$$

$$\text{GH}_{(j\omega)} = \frac{-K}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{1}{Q}} \quad ; \quad \text{GL}_{(j\omega)} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q}}$$

$$\text{GH}_{(j\omega)} = \frac{K}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{Q^2}}} \angle \Theta_{\text{GH}} = 180^\circ - \text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \right]$$

$$\text{GL}_{(j\omega)} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{Q^2}}} \angle \Theta_{\text{GL}} = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \right]$$

$$\Theta_{\text{GH}} = 180^\circ + \Theta_{\text{GL}}$$

$$|GH_{(j\omega)}| = \frac{K}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{Q^2}}} \quad ; \quad |GL_{(j\omega)}| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{Q^2}}}$$

$$|GH_{(j\omega)}|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}(K) - 10 \cdot \text{Log}\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{Q^2}\right]$$

$$|GL_{(j\omega)}|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}(K) - 10 \cdot \text{Log}\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{Q^2}\right]$$

Frequência de Cruzamento

Em $\omega = \omega_0$ e, por conseguinte, em $f = F_0$, as funções de transferência das vias passa-altas e passa-baixas possuem o mesmo módulo, ou seja, se cruzam nesta frequência. Assim, F_0 será a frequência de crossover do filtro.

Forma Cartesiana:

$$GH_{(\omega_0)} = \frac{-K \cdot Q}{j} = j \cdot K \cdot Q = K \cdot Q \angle 90^\circ \quad ; \quad GL_{(\omega_0)} = \frac{K \cdot Q}{j} = -j \cdot K \cdot Q = K \cdot Q \angle -90^\circ$$

Forma Polar:

$$GH_{(\omega_0)} = K \cdot Q \angle 180^\circ - \text{tg}^{-1}[\infty] = K \cdot Q \angle 90^\circ \quad ; \quad GL_{(\omega_0)} = K \cdot Q \angle -\text{tg}^{-1}[\infty] = K \cdot Q \angle -90^\circ$$

As fases em oposição justificam a recomendação, nos divisores de frequência de segunda ordem para a inversão de uma das vias, pois, caso contrário, o módulo resultante da soma será nulo na frequência de corte.

$$|GH_{(\omega_0)}| = |GL_{(\omega_0)}| = K \cdot Q$$

$$|GH_{(\omega_0)}|_{dB} = |GL_{(\omega_0)}|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}(K) + 20 \cdot \text{Log}(Q)$$

Devemos notar que o módulo da função de transferência, nesta frequência, é função do Q do filtro.

Assim sendo, para o caso Linkwitz-Riley, onde o fator de qualidade é igual a 0,5, o cruzamento entre as vias dar-se-á no ponto de -6 dB (considerando $K = 1$); no caso de um crossover Butterworth, onde $Q = 0,707$ o cruzamento acontecerá quando os módulos forem iguais a -3 dB.

Linkwitz-Riley:

$$\left|GH_{(\omega_0)}\right|_{dB} = \left|GL_{(\omega_0)}\right|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}(1) + 20 \cdot \text{Log}(0.5) \simeq 0 - 6 \simeq -6$$

Butterworth:

$$\left|GH_{(\omega_0)}\right|_{dB} = \left|GL_{(\omega_0)}\right|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}(1) + 20 \cdot \text{Log}(0.707) \simeq 0 - 3 \simeq -3$$

Superposição das Vias HP e LP

Soma da via passa-baixas com a via passa-altas invertida:

$$G_{(s)}^- = GL_{(s)} - GH_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} - \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} = \frac{K \cdot (\omega_0^2 - s^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$G_{(j\omega)}^- = \frac{K \cdot (\omega_0^2 + \omega^2)}{-\omega^2 + j \cdot \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q} + \omega_0^2} = \frac{K \cdot (\omega_0^2 + \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q}}$$

$$G_{(j\omega)}^- = \frac{K \cdot (\omega_0^2 + \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2}}} \angle \Theta_{G^-} = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right]$$

$$\left|G_{(j\omega)}^-\right| = \frac{K \cdot (\omega_0^2 + \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2}}} \quad ; \quad \Theta_{G^-} = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right] = \Theta_{GL}$$

Para $\left|G_{(j\omega)}^-\right| = 1$, supondo $K = 1$, vem:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2} = (\omega_0^2 + \omega^2)^2$$

$$\omega_0^4 - 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 + \omega^4 + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2} = \omega_0^4 + 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 + \omega^4$$

$$-2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2} = 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2$$

$$\frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2} = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 \quad \therefore \quad \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q} = 2 \cdot \omega_0 \cdot \omega \quad \therefore \quad Q = 0.5$$

Conforme vemos, somente para $Q = 0,5$ é que a superposição dos módulos será unitária, ou seja, no caso do crossover Linkwitz-Riley.

Soma da via passa-baixas com a via passa-altas

$$G_{(s)}^+ = G_{L(s)} + G_{H(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} + \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} = \frac{K \cdot (\omega_0^2 + s^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$G_{(j\omega)}^+ = \frac{K \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{-\omega^2 + j \cdot \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q} + \omega_0^2} = \frac{K \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q}} = \frac{K}{1 + j \cdot \frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}}$$

$$G_{(j\omega)}^+ = \frac{K}{1 + j \cdot \frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}}$$

$$G_{(j\omega)}^+ = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}} \angle \Theta_{G^+} = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right]$$

$$\left| G_{(j\omega)}^+ \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}}; \quad \Theta_{G^+} = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right] = \Theta_{G^-} = \Theta_{GL}$$

Como podemos observar, em $\omega = \omega_0$ o módulo da resposta, correspondente à soma das vias passa-altas e passa-baixas torna-se nula, daí a recomendação para a inversão de fase da via passa-altas.

Respostas normalizadas em relação a ω_0 :

$$GH_{(s)} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} \quad ; \quad GL_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$GH_{(s)} = \frac{K \cdot \frac{s^2}{\omega_0^2}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q} \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1} \quad ; \quad GL_{(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q} \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1}$$

$$GH_{(s_N)} = \frac{K \cdot s_N^2}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1} \quad ; \quad GL_{(s_N)} = \frac{K}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1}$$

$$s_N = \frac{s}{\omega_0} \quad ; \quad \omega_N = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$GH_{(j\omega_N)} = \frac{-K \cdot \omega_N^2}{1 - \omega_N^2 + j \cdot \frac{\omega_N}{Q}} \quad ; \quad GL_{(j\omega_N)} = \frac{K}{1 - \omega_N^2 + j \cdot \frac{\omega_N}{Q}}$$

$$GH_{(j\omega_N)} = \frac{-K \cdot \frac{1}{\omega_N^2}}{\frac{1}{\omega_N^2} - 1 + j \cdot \frac{1}{Q \cdot \omega_N}} \quad ; \quad GH_{(j\omega_N)} = \frac{K}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_N^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2 \cdot \omega_N^2}} \angle 180^\circ - \text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{1}{\omega_N} - \omega_N\right)} \right]}$$

$$GL_{(j\omega_N)} = \frac{K}{1 - \omega_N^2 + j \cdot \frac{\omega_N}{Q}} \quad ; \quad GL_{(j\omega_N)} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \omega_N^2\right)^2 + \frac{\omega_N^2}{Q^2}} \angle -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{1}{\omega_N} - \omega_N\right)} \right]}$$

Superposição (diferença) das respostas normalizadas:

$$G_{(s_N)}^- = G_{L(s)} - G_{H(s_N)} = \frac{K}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1} - \frac{K \cdot s_N^2}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1}$$

$$G_{(s_N)}^- = \frac{K \cdot (1 - s_N^2)}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1}$$

Fazendo $Q = 0.5$, ou seja, no caso da resposta Linkwitz-Riley, vem:

$$G_{(s_N)}^- = \frac{K \cdot (1 - s_N^2)}{s_N^2 + 2 \cdot s_N + 1} = \frac{K \cdot (1 + s_N) \cdot (1 - s_N)}{(s_N + 1)^2} = \frac{K \cdot (1 - s_N)}{(s_N + 1)}$$

$$G_{(s_N)}^- = K \cdot \frac{(1 - s_N)}{(1 + s_N)}$$

$$G_{(j\omega_N)}^- = K \cdot \frac{(1 - j \cdot \omega_N)}{(1 + j \cdot \omega_N)}$$

$$G_{(j\omega_N)}^- = K \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega_N^2} \angle -\text{tg}^{-1}(\omega_N)}{\sqrt{1 + \omega_N^2} \angle \text{tg}^{-1}(\omega_N)} = K \angle -2 \cdot \text{tg}^{-1}(\omega_N)$$

A superposição das vias passa-baixas e passa-altas, com a polaridade da ultima invertida (diferença) a resposta é aquela de um filtro tipo passa-tudo, onde todas as frequências passam, sem alteração na amplitude, mas a fase é modificada.

Transformação Passa-Baixas para Passa-Altas

Se trocarmos a variável complexa s por $1/s$, em uma função passa-baixas obteremos uma função passa-altas com as seguintes características:

- 1 – O mesmo ganho K
- 2 – O mesmo fator de qualidade Q
- 3 – Uma frequência de cruzamento igual ao inverso da original

$$GL_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} \Rightarrow GH_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \left(\frac{1}{s}\right) + \omega_0^2}$$

$$GH_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\frac{1}{s^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{1}{s} + \omega_0^2} = \frac{K \cdot \omega_0^2 \cdot s^2}{1 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2 \cdot s^2} = \frac{K \cdot \omega_0^2 \cdot s^2}{\omega_0^2 \cdot s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + 1}$$

$$GH_{(s)} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q} \cdot s + \frac{1}{\omega_0^2}}$$

Como, normalmente, desejamos que as frequências de cruzamento das vias passa-baixas e passa-altas sejam iguais, deveremos aplicar esta transformação na função passa-baixas, normalizada em relação a ω_0 .

$$GL_{(s_N)} = \frac{K}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1} \Rightarrow GH_{(s_N)} = \frac{K}{\left(\frac{1}{s_N}\right)^2 + \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{1}{s_N}\right) + 1} \quad \text{onde } s_N = \frac{s}{\omega_0}$$

$$GH_{(s_N)} = \frac{K \cdot s_N^2}{1 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + s_N^2} = \frac{K \cdot s_N^2}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1}$$

Substituindo s_N por $\frac{s}{\omega_0}$, ou seja, desnormalizando, vem:

$$GH_{(s)} = \frac{K \cdot \frac{s^2}{\omega_0^2}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q} \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{1}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

Normalmente, esta é a maneira utilizada para a obtenção da funções passa-altas.

Funções de Transferência - Resposta Linkwitz - Riley

A resposta Linkwitz-Riley pode ser obtida através da associação em cascata de dois filtros Butterworth idênticos, daí serem também conhecidos como Butterworth quadráticos.

$$GH_{(s)} = \left(\frac{s}{s + \omega_0} \right)^2 = \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \quad ; \quad GL_{(s)} = \left(\frac{\omega_0}{s + \omega_0} \right)^2 = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

$$GH_{(s)} = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} \quad ; \quad GL_{(s)} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$GH_{(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{0.5} \cdot s + \omega_0^2} \quad ; \quad GL_{(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{0.5} \cdot s + \omega_0^2}$$

Superposição das Vias HP e HL

$$G_{(j\omega)}^- = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega^2}{Q^2}}} \angle -\text{tg}^{-1} \left[\frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right]$$

Fazendo $Q = 0,5$, vem:

$$G_{(j\omega)}^- = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}} \angle -\text{tg}^{-1} \left[\frac{2}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} \right]$$

$$|G_{(j\omega)}^-| = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}} = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\sqrt{\omega_0^4 - 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 + \omega^4 + 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}}$$

$$|G_{(j\omega)}^-| = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\sqrt{\omega_0^4 + 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 + \omega^4}} = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 + \omega^2)^2}} = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2} = 1$$

Funções de Transferência - Resposta de Bessel

As respostas passa-baixas, tipo Bessel, têm como principal interesse sua fase, que é maximamente plana na origem, sendo dada, para segunda ordem, pela seguinte equação:

$$GL_{(s)} = \frac{3}{s^2 + 3 \cdot s + 3} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

Onde

$$\omega_0^2 = 3 \quad \therefore \quad \omega_0 = \sqrt{3}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = 3 \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{Q} = 3 \quad \therefore \quad Q = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Desse modo, a função de Bessel, passa-baixas, modificada, será dada por:

$$GL_{(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{3} \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

Normalizando em relação a ω_0 e transformando para passa-altas, vem:

$$GL_{(s_N)} = \frac{1}{s_N^2 + \frac{1}{Q} \cdot s_N + 1} = \frac{1}{s_N^2 + \sqrt{3} \cdot s_N + 1}$$

$$GH_{(s_N)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{s_N}\right)^2 + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{s_N}\right) + 1} = \frac{s_N^2}{1 + \sqrt{3} \cdot s_N + s_N^2} = \frac{s_N^2}{s_N^2 + \sqrt{3} \cdot s_N + 1}$$

Desnormalizando:

$$GH_{(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{3} \cdot \omega_0 \cdot s + \omega_0^2}$$

Curvas de Resposta

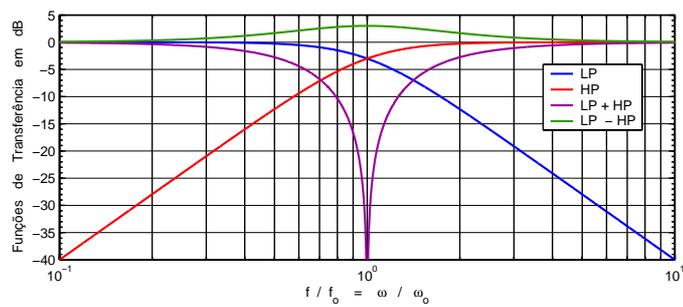
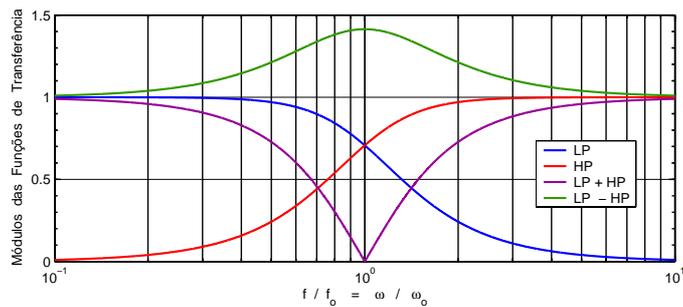


Fig. 16 – Respostas Butterworth.

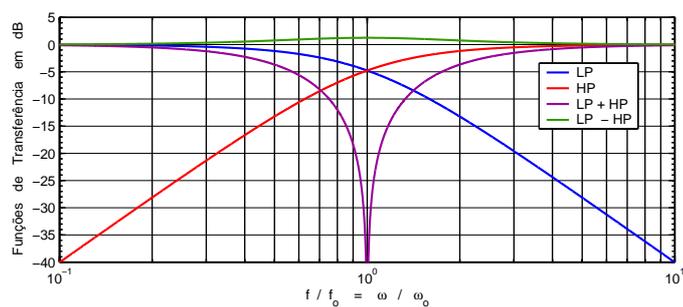
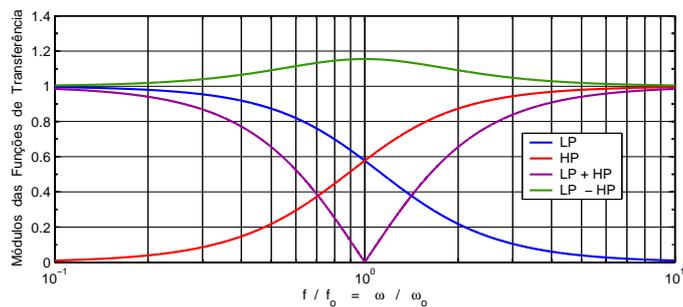


Fig. 17 – Respostas Bessel.

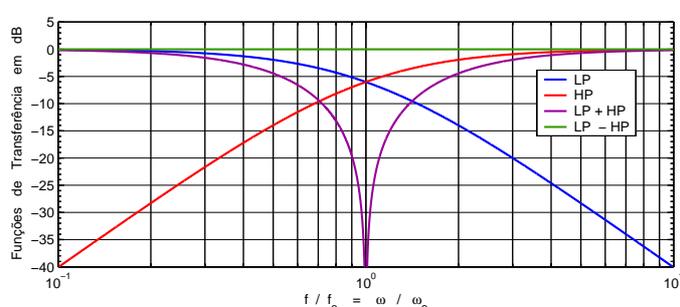
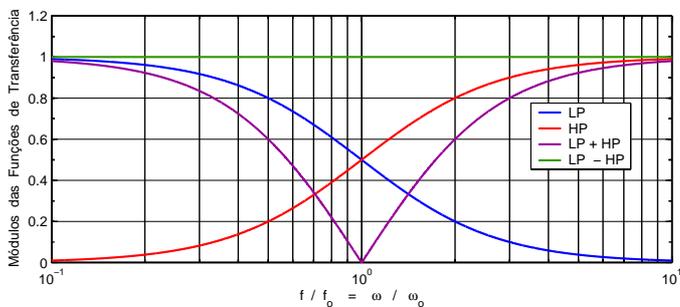


Fig. 18 – Respostas Lkwitz-Riley.

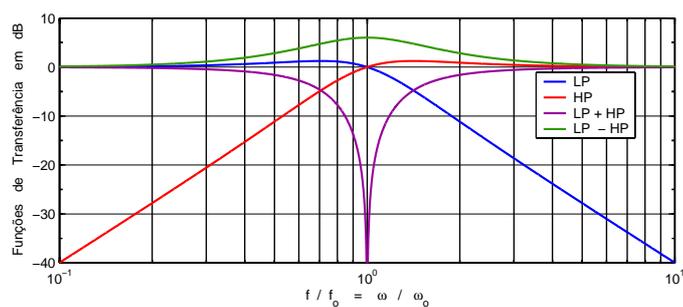
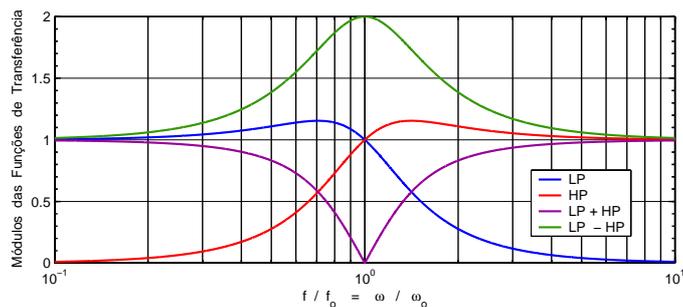


Fig. 19 – Respostas Chebychev com $Q = 1$.

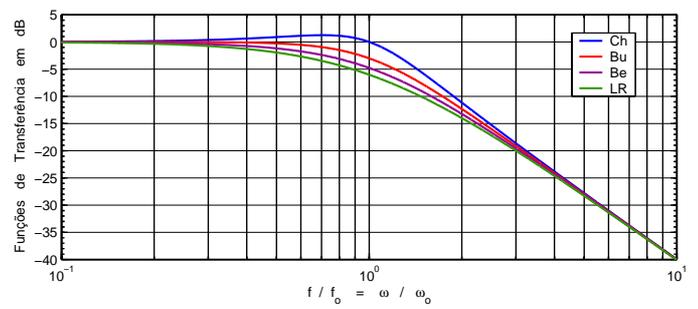
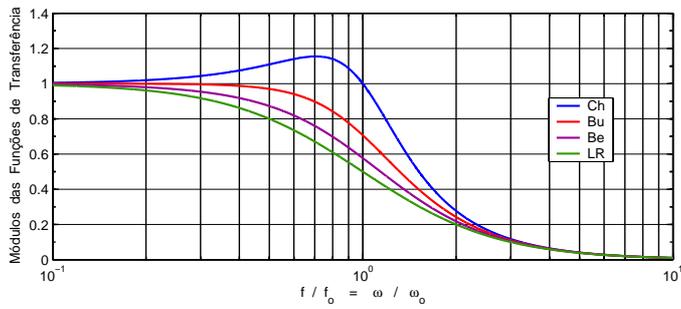


Fig. 20 – Comparativo entre as respostas passa-baixas.

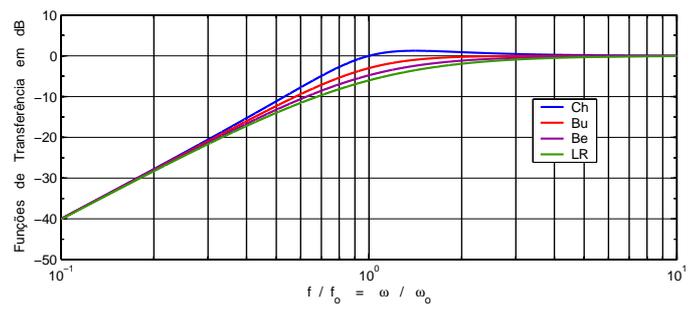
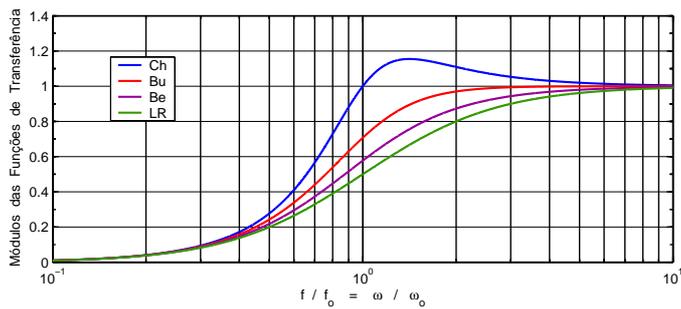


Fig. 21 – Comparativo entre as respostas passa-altas.

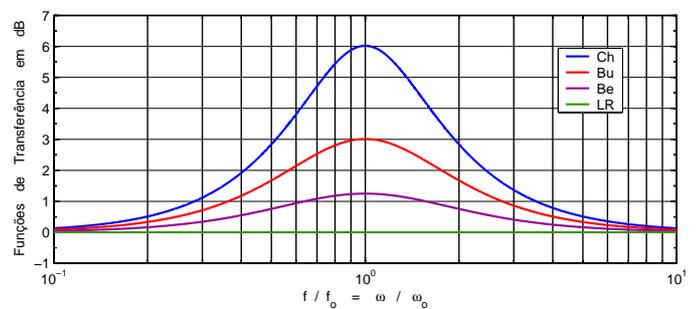
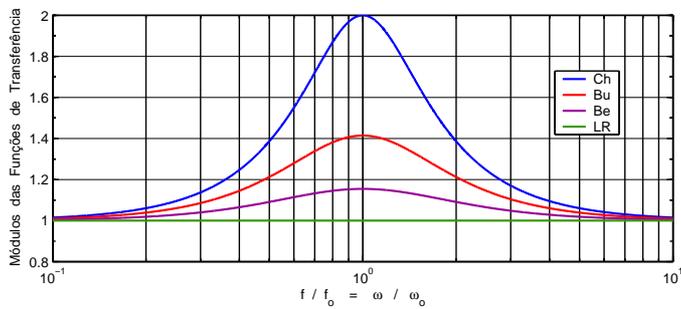


Fig. 22 – Comparativo entre as respostas LP - HP.

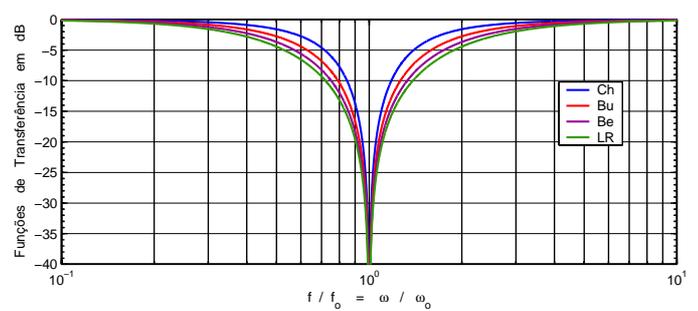
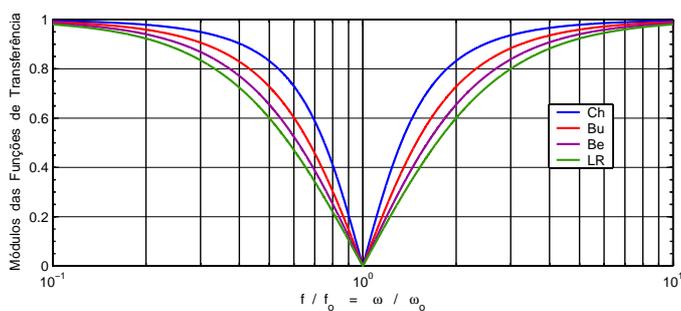


Fig. 23 – Comparativo entre as respostas LP + HP.

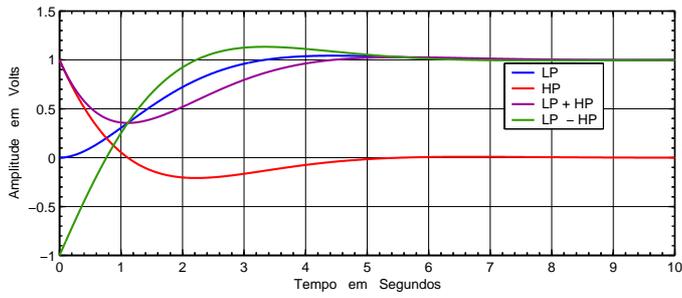


Fig. 24 – Respostas ao Degrau, Butterworth.

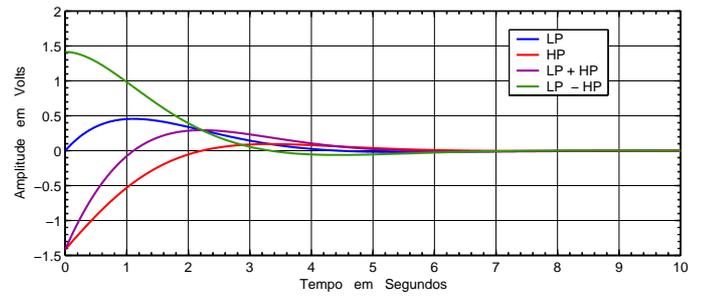


Fig. 25 – Respostas ao Impulso, Butterworth.

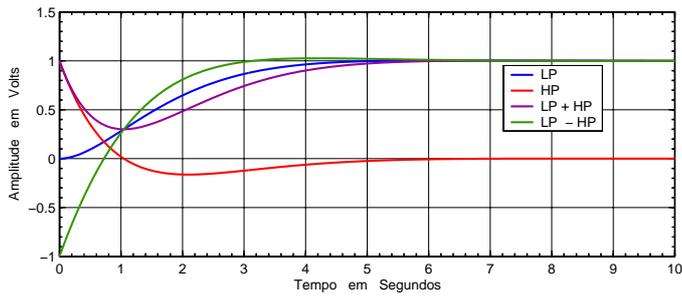


Fig. 26 – Respostas ao Degrau, Bessel.

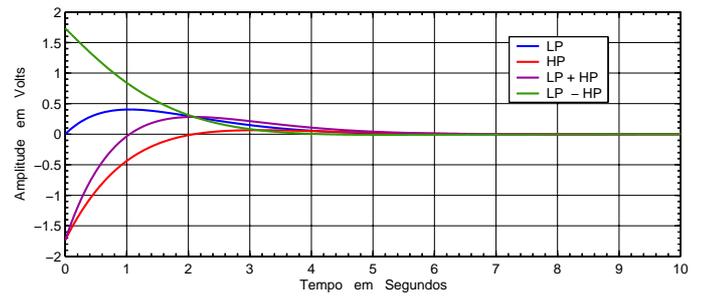


Fig. 27 – Respostas ao Impulso, Bessel.

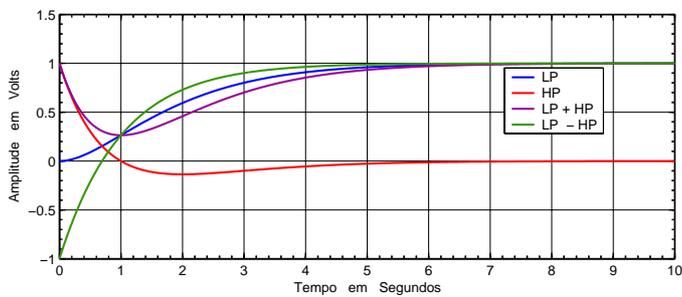


Fig. 28 – Respostas ao Degrau, Linkwitz-Riley.

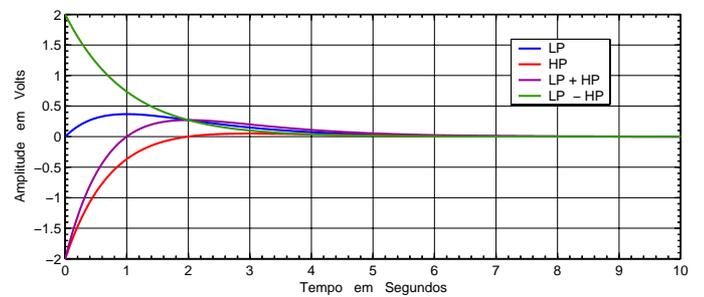


Fig. 29 – Respostas ao Impulso, Linkwitz-Riley.

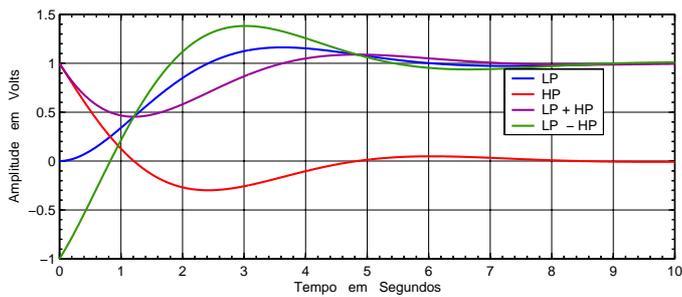


Fig. 29 – Respostas ao Degrau, Chebyshev.

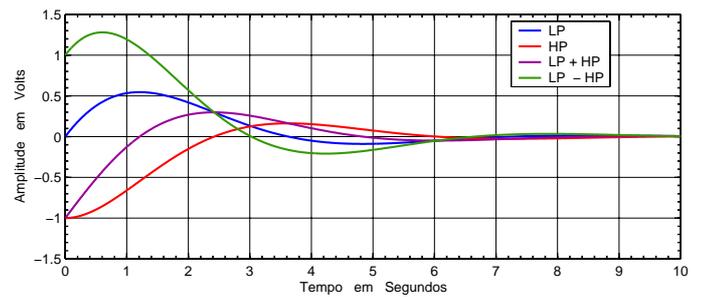


Fig. 30 – Respostas ao Impulso, Chebyshev.

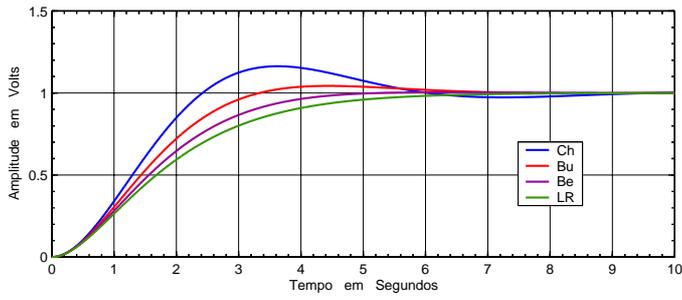


Fig. 31 – Comparativo Respostas ao Degrau, LP.

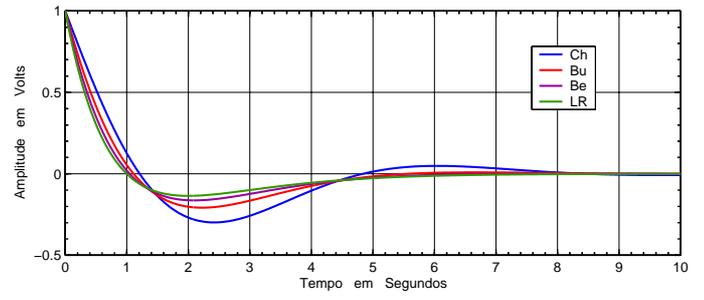


Fig. 32 – Comparativo Respostas ao Degrau, HP.

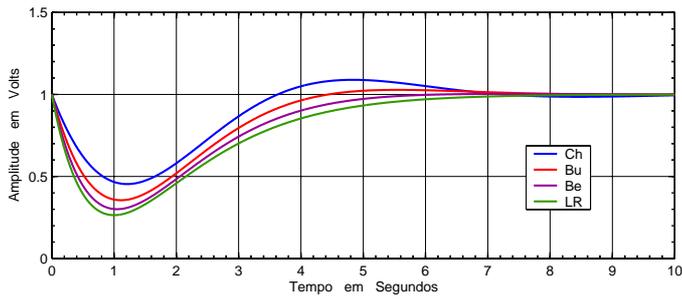


Fig. 33 – Comparativo Respostas ao Degrau, LP + HP.

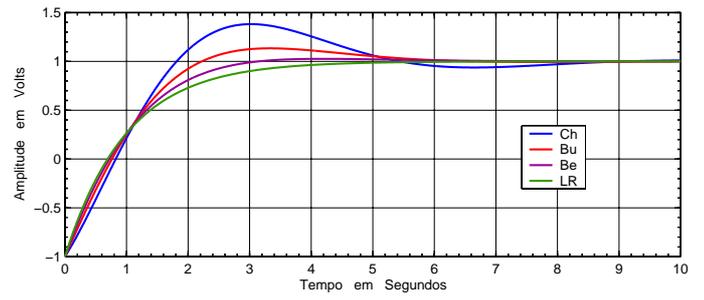


Fig. 34 – Comparativo Respostas ao Degrau, LP - HP.

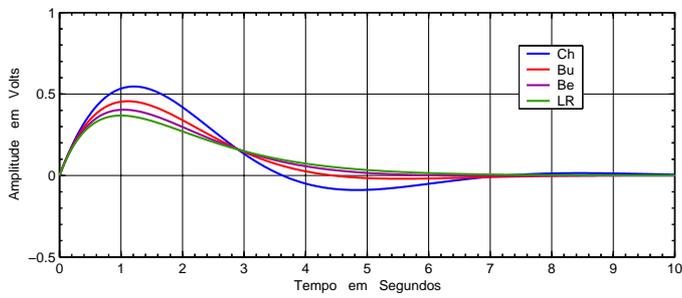


Fig. 35 – Comparativo Respostas ao Impulso, LP.

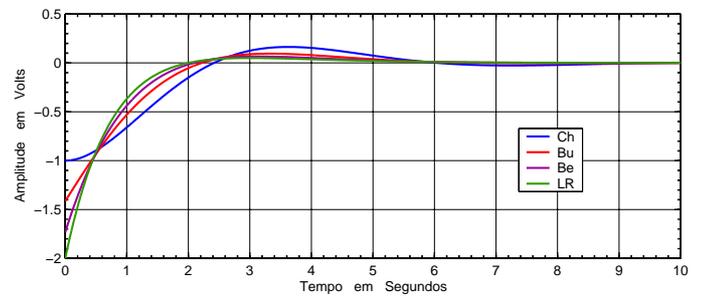


Fig. 36 – Comparativo Respostas ao Impulso, HP.

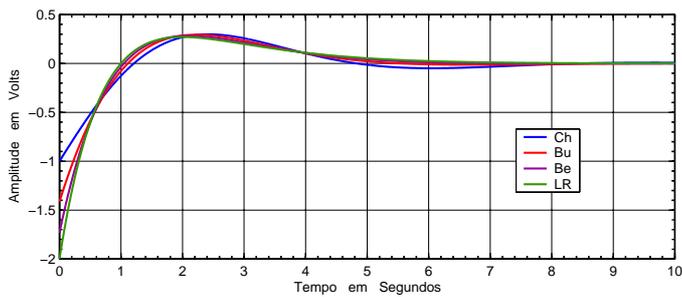


Fig. 37 – Comparativo Respostas ao Impulso, LP + HP.

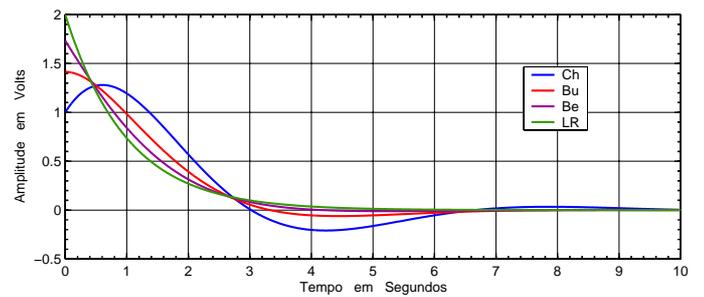


Fig. 38 – Comparativo Respostas ao Impulso, LP - HP.

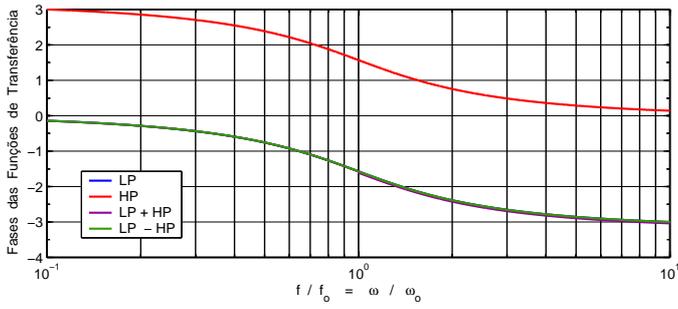


Fig. 39 – Fases das Respostas Butterworth.

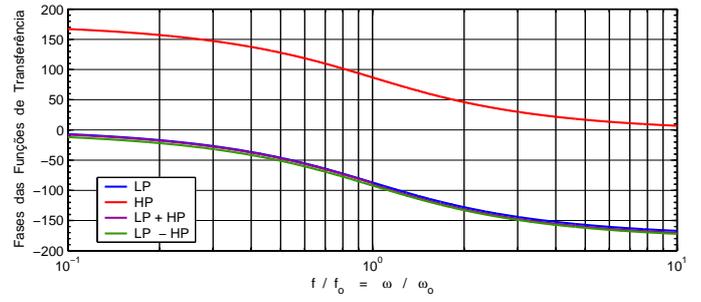


Fig. 40 – Fases das Respostas Bessel.

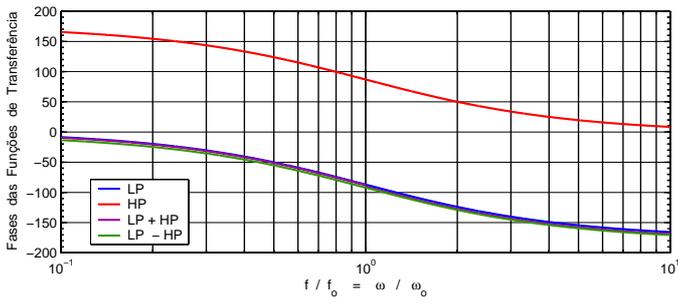


Fig. 41 – Fases das Respostas Linkwitz-Riley.

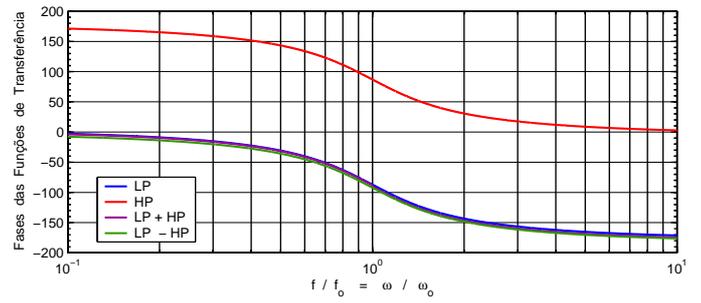


Fig. 42 – Fases das Respostas Chebyshev.

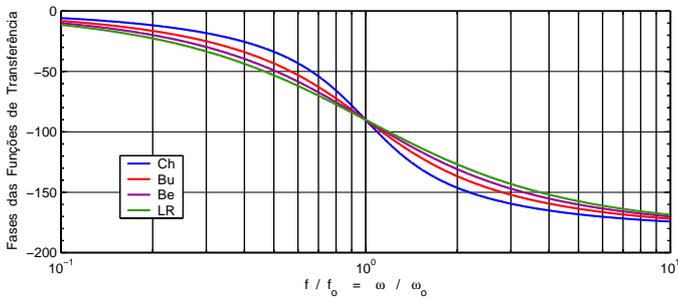


Fig. 43 – Comparativo Respostas de Fase, LP.

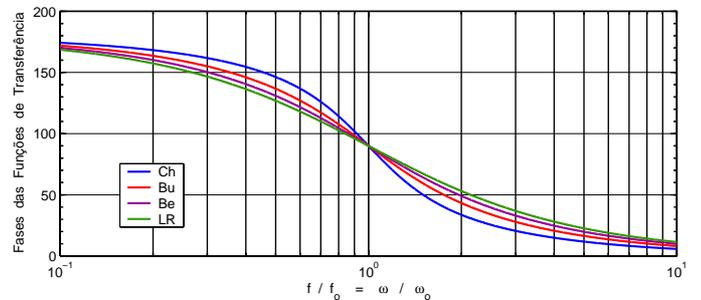


Fig. 44 – Comparativo Respostas de Fase, HP.

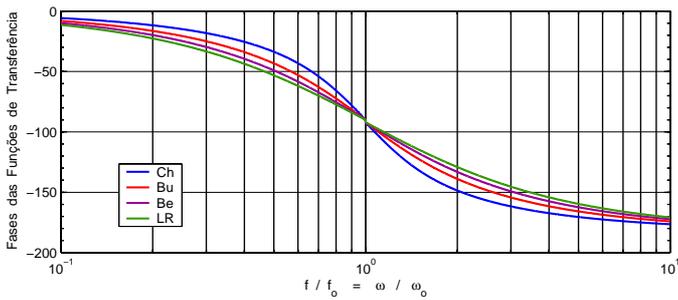


Fig. 45 – Comparativo Respostas de Fase, LP + HP.

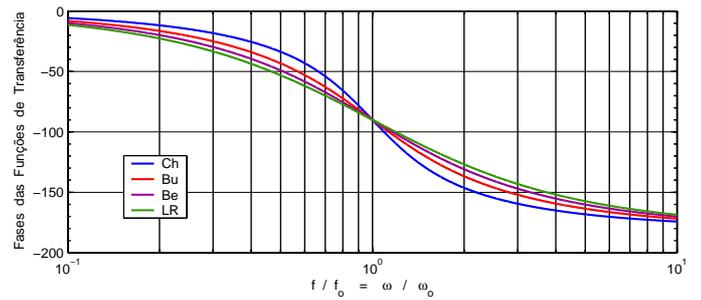


Fig. 46 – Comparativo Respostas de Fase, LP - HP.

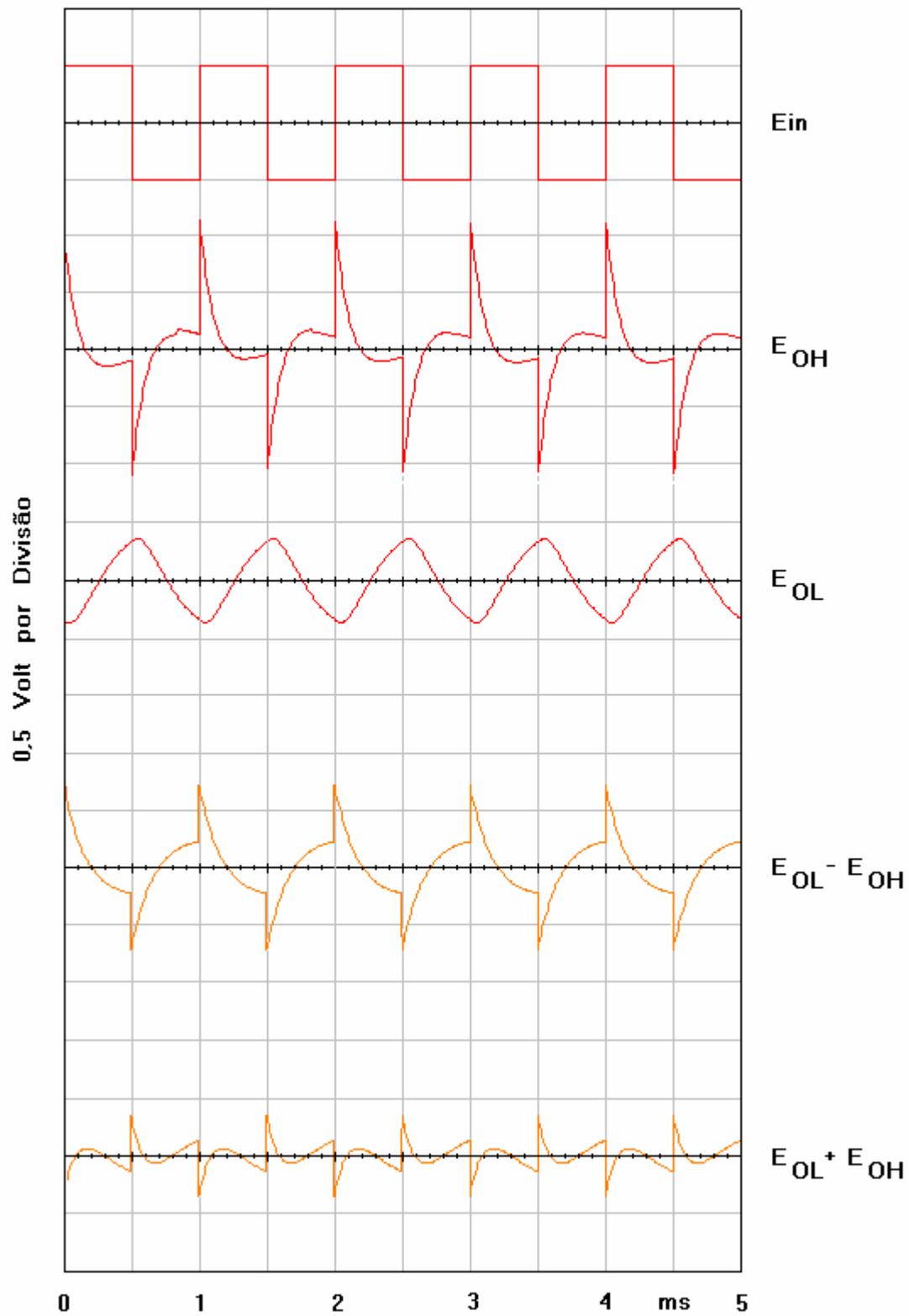


Fig. 47 – Formas de onda em um crossover tipo Linkwitz-Riley, de segunda ordem, com o corte em 1 kHz, alimentado por uma onda quadrada também de 1 kHz e 0,5 V de pico.

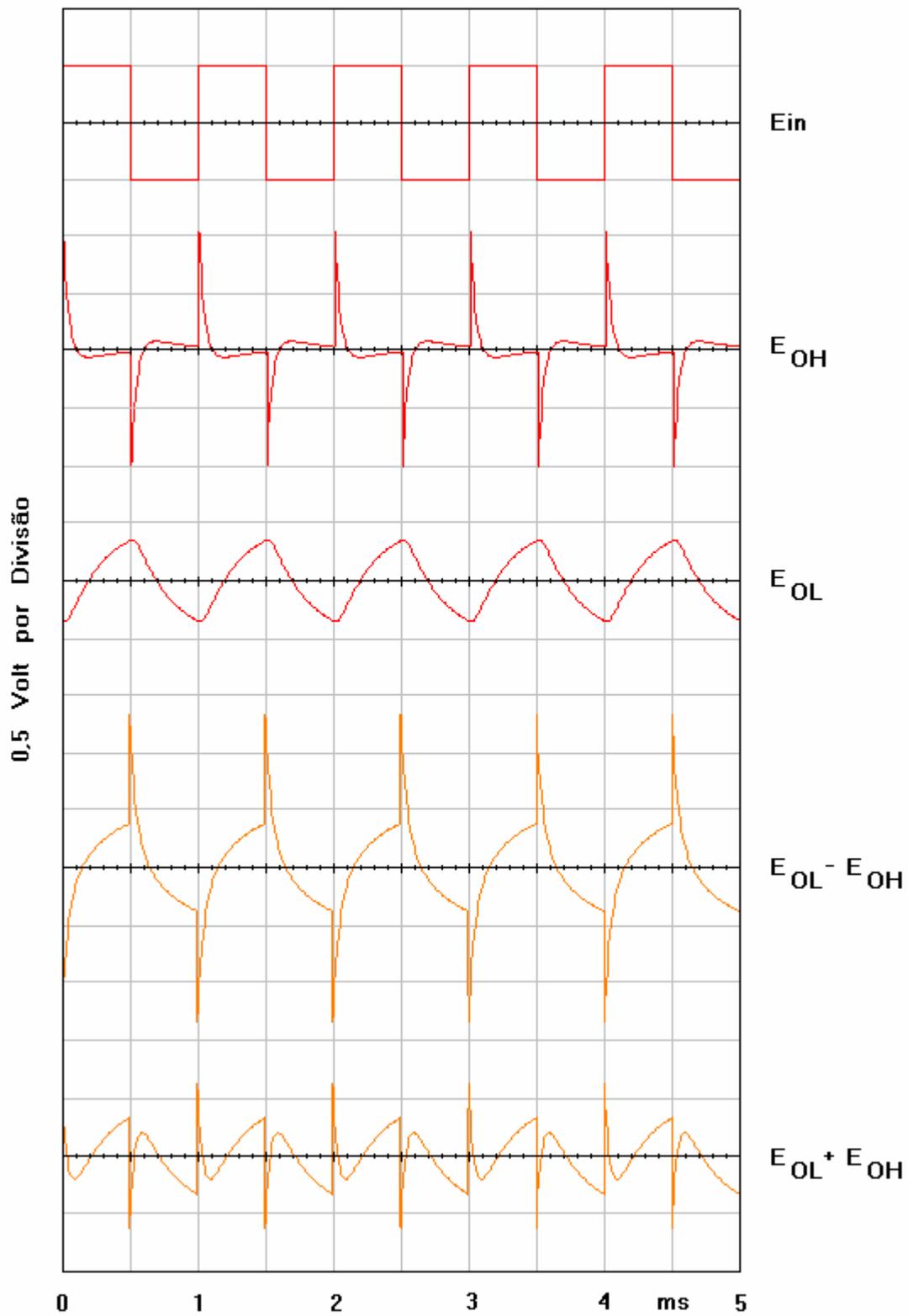


Fig. 48 – Formas de onda em um crossover tipo Bessel, de segunda ordem, com o corte em 1 kHz, alimentado por uma onda quadrada também de 1 kHz e 0,5 V de pico.

As curvas dos Retardos de Fase e de Grupo, ambos normalizados, mostram que a resposta de Bessel é a mais plana na origem, ou seja, esta é a resposta que menos altera as fases das frequências componentes dos sinais, sendo este seu ponto de maior interesse.

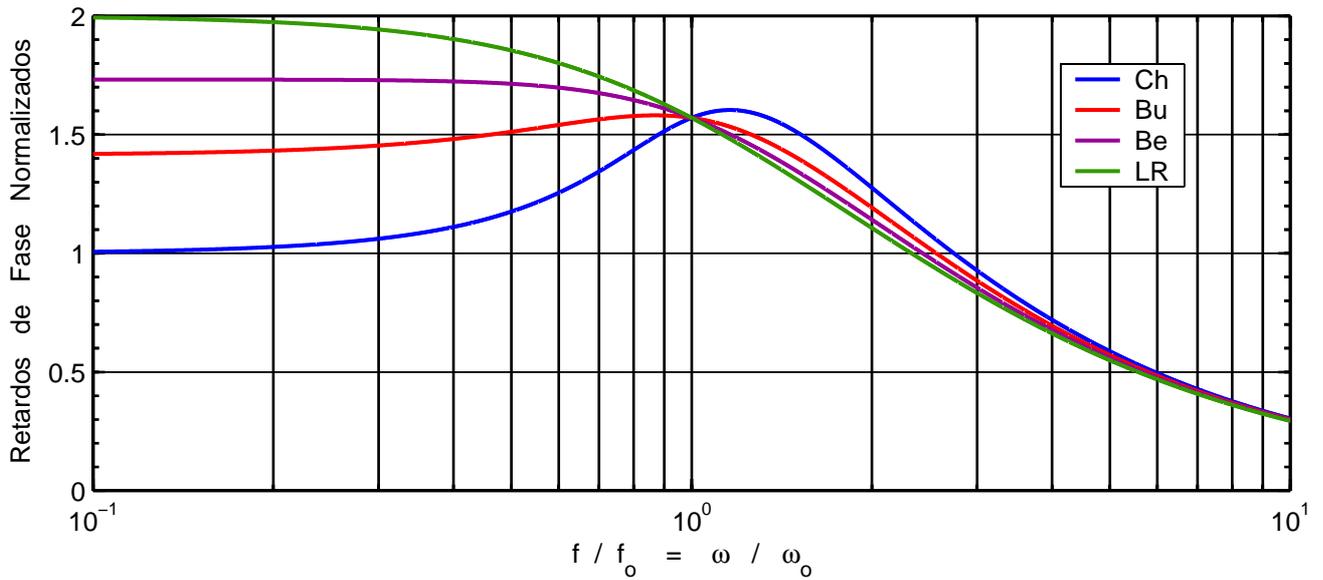


Fig. 49 – Retardos de Fase, normalizados, das respostas LP, LP – HP e LP + HP .

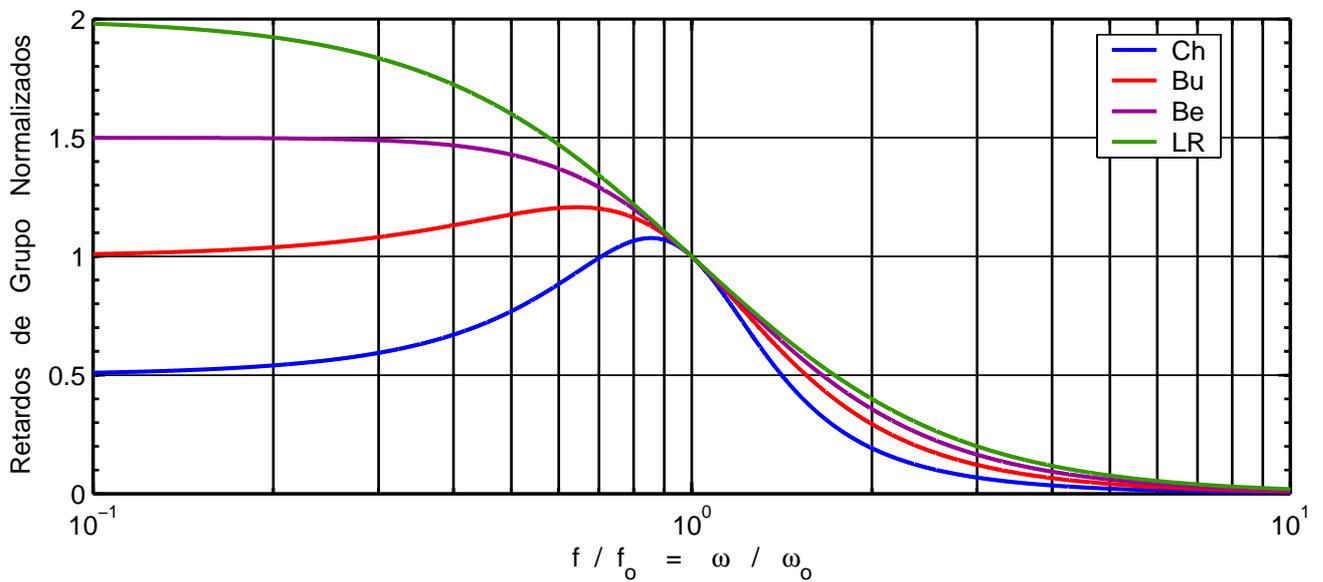


Fig. 50 – Retardos de Grupo, normalizados, das respostas LP, HP, LP – HP e LP + HP .

Retardo de Fase

O retardo de fase (phase delay) τ_f é definido como sendo igual a $-\frac{\Theta_{(\omega)}}{\omega}$, ou seja, o negativo do cociente entre o ângulo de fase (geralmente uma função da frequência) e a frequência angular $\omega = 2\pi f$.

Desse modo, o retardo de fase da via passa-baixas de um crossover será dado por $-\frac{\Theta_{GL}}{\omega}$, e pode ser obtido facilmente no MatLab.

O retardo de fase, normalizado em relação a ω_0 , é dado por: $\tau_{fN} = \tau_f \cdot \omega_0$, sendo adimensional.

Fisicamente representa o retardo introduzido pelo sistema, na propagação do sinal.

Retardo de Grupo

O retardo de grupo (group delay) τ_g é definido como sendo igual a $-\frac{d\Theta_{(\omega)}}{d\omega}$, ou seja, o negativo da derivada do ângulo de fase em relação à frequência angular ω .

O termo grupo significa que essa propriedade aplica-se a duas frequências, ou a um grupo de frequências próximas entre si. Representa o retardo introduzido pelo sistema na propagação do envelope de duas ondas de frequências muito próximas, ou seja, o batimento entre elas.

Supondo um sinal de entrada composto por duas componentes cosenoidais, de frequências bastante próximas, tais que $\omega_2 > \omega_1$, podemos exprimir o sinal resultante como sendo uma cosenoide de frequência igual à média das frequências de entrada, cuja amplitude varia proporcionalmente ao coseno da metade da diferença entre elas, e que constitui o envelope do sinal de alta frequência..

$$e_{in} = e_1 + e_2 \quad \text{onde} \quad e_1 = \cos(\omega_1 \cdot t) \quad ; \quad e_2 = \cos(\omega_2 \cdot t)$$

$$e_{in} = \cos(\omega_1 \cdot t) + \cos(\omega_2 \cdot t) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \cdot t\right)$$

Retardo de Grupo em Filtros de 2ª Ordem

$$\theta_{(\omega)} = \text{tg}^{-1}(y)$$

$$\tau_g = -\frac{d}{d\omega}[\theta_{(\omega)}] = -\frac{d}{d\omega}[\text{tg}^{-1}(y)] = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{dy}{d\omega}$$

Para os filtros de segunda ordem, os retardos de grupo das vias passa-altas e passa-baixas são iguais aos das superposições (soma e diferença) das respostas passa-baixas e passa-altas. Isto se deve porque, conforme vimos, $\Theta_{GH} = 180^\circ + \Theta_{GL}$ e $\Theta_{G^+} = \Theta_{G^-} = \Theta_{GL}$. Como o retardo de grupo depende da derivada da fase, a constante aditiva, no caso 180° , é irrelevante para a derivada.

$$y = \frac{1/Q}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \quad \text{onde} \quad u = \frac{1}{Q} \quad ; \quad v = \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$u' = 0 \quad ; \quad v' = -\left(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_0} \right)$$

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{\frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_0} \right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

$$\tau_g = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_0} \right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = \frac{\frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_0} \right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2}} = \frac{Q \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{1}{\omega_0} \right)}{Q^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1}$$

$$\tau_g = \frac{\frac{Q}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{Q^2 \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1} = \frac{\frac{Q}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_N^2} + 1 \right)}{Q^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega_N} - \omega_N \right)^2 + 1}$$

$$\tau_{g_0} = \frac{2 \cdot Q}{\omega_0} = \frac{2 \cdot Q}{\omega_0}$$

$$\tau_{g_N} = \frac{\tau_g}{\tau_{g_0}} = \tau_g \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot Q}$$

$$\tau_{g_N} = \frac{\frac{Q}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_N^2} + 1 \right)}{Q^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega_N} - \omega_N \right)^2 + 1} \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot Q} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\omega_N^2} + 1 \right)}{Q^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega_N} - \omega_N \right)^2 + 1}$$

Para $Q = 0,5$, ou seja, no caso do filtro Linkwitz-Riley, temos:

$$\tau_g = \frac{\frac{Q}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_N^2} + 1 \right)}{Q^2 \cdot \left(\frac{1}{\omega_N} - \omega_N \right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 1} = \frac{\frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 4}$$

$$\tau_g = \frac{\frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 4} = \frac{\frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 4} = \frac{\frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\tau_g = \frac{\frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 1 \right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = \frac{\frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega^2} \right)}{\left(\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega \cdot \omega_0} \right)^2} = \frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega^2} \right) \cdot \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2} \right)^2$$

$$\tau_g = \frac{2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega^2} \right) \cdot \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2} \right)^2 = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 + \omega^2)^2}$$

$$\tau_g = \frac{2 \cdot \omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2} \quad \therefore \quad \tau_g = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \quad \therefore \quad \tau_g = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + \omega_N^2}$$

$$\tau_{g_0} = \frac{2 \cdot Q}{\omega_0} = \frac{2}{2 \cdot \omega_0} = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\tau_{g_N} = \frac{\tau_g}{\tau_{g_0}} = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \cdot \omega_0 = \frac{2 \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2}$$

$$\tau_{g_N} = \frac{2}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{2}{1 + \omega_N^2}$$

Cálculo dos Componentes em Função do Q - Passa – Altas

Equacionando a malha RC, do circuito passa-altas, da Fig. 1, vem:

$$GH(s) = \frac{\frac{s \cdot L_H \cdot R}{R + s \cdot L_H}}{\frac{1}{s \cdot C_H} + \frac{s \cdot L_H \cdot R}{R + s \cdot L_H}} = \frac{\frac{s \cdot L_H \cdot R}{R + s \cdot L_H}}{\frac{s \cdot C_H}{R + s \cdot L_H} + s \cdot L_H \cdot R} = \frac{s^2 \cdot R \cdot L_H \cdot C_H}{R + s \cdot L_H + s^2 \cdot R \cdot L_H \cdot C_H}$$

$$GH(s) = \frac{s^2}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C_H} + \frac{1}{L_H \cdot C_H}}$$

$$GH(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_H \cdot C_H}} \quad ; \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R \cdot C_H}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R \cdot C_H} \quad \therefore \quad 2 \cdot \pi \cdot F_0 = \frac{Q}{R \cdot C_H}$$

$$C_H = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_H \cdot C_H}} \quad \therefore \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_H \cdot C_H} \quad \therefore \quad L_H \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{C_H}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R \cdot C_H} \quad \therefore \quad \frac{R \cdot \omega_0}{Q} = \frac{1}{C_H}$$

$$\frac{R \cdot \omega_0}{Q} = L_H \cdot \omega_0^2 \quad \therefore \quad \frac{R}{Q} = L_H \cdot \omega_0 \quad \therefore \quad L_H = \frac{R}{\omega_0 \cdot Q}$$

$$L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot Q}$$

Cálculo dos Componentes em Função do Q - Passa - Baixas

$$GL_{(s)} = \frac{\frac{R_L}{s \cdot R_L \cdot C_L + 1}}{s \cdot L_L + \frac{R_L}{s \cdot R_L \cdot C_L + 1}} = \frac{R_L}{s \cdot L_L \cdot (s \cdot R_L \cdot C_L + 1) + R_L} = \frac{R_L}{s^2 \cdot R_L \cdot L_L \cdot C_L + s \cdot L_L + R_L}$$

$$GL_{(s)} = \frac{\frac{1}{L_L \cdot C_L}}{s^2 + s \cdot \frac{1}{R_L \cdot C_L} + \frac{1}{L_L \cdot C_L}} \quad ; \quad GL_{(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_L \cdot C_L} \quad ; \quad \frac{\omega_0 \cdot R_L}{Q} = \frac{1}{C_L}$$

$$C_L = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_L \cdot C_L} \quad ; \quad L_L = \frac{1}{\omega_0^2 C_L} = \frac{\omega_0 \cdot R_L}{Q} = \frac{R_L}{\omega_0 \cdot Q}$$

$$L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot Q}$$

Cálculo dos Componentes Para Linkwitz-Riley (Q = 0,5) - Passa - Altas

$$C_H = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_0} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot Q}$$

$$C_H = \frac{0,5}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_0} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_0 \cdot 0,5}$$

$$C_H = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot F_0} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{\pi \cdot F_0}$$

$$C_{H(\mu F)} = \frac{250000}{\pi \cdot R \cdot F_0} \quad ; \quad L_{H(mH)} = \frac{1000 \cdot R}{\pi \cdot F_0}$$

Cálculo dos Componentes Para Linkwitz-Riley (Q = 0,5) - Passa – Baixas

$$C_L = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_L = \frac{0,5}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot 0,5}$$

$$C_L = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{\pi \cdot F_O}$$

$$C_{L(\mu F)} = \frac{250000}{\pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_{L(mH)} = \frac{1000 \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$$

Cálculo dos Componentes Para Bessel ($1/\sqrt{3} = 0,577$) - Passa – Altas

$$C_H = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_H = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{\sqrt{3} \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot F_O}$$

$$C_{H(\mu F)} = \frac{500000}{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_{H(mH)} = \frac{500 \cdot \sqrt{3} \cdot R}{\pi \cdot F_O}$$

Cálculo dos Componentes Para Bessel ($1/\sqrt{3} = 0,577$) - Passa – Baixas

$$C_L = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_L = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{\sqrt{3} \cdot R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O}$$

$$C_{L(\mu F)} = \frac{500000}{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_{L(mH)} = \frac{500 \cdot \sqrt{3} \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$$

Cálculo dos Componentes Para Butterworth ($1/\sqrt{2} = 0,707$) - Passa – Altas

$$C_H = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_H = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{\sqrt{2} \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot F_O}$$

$$C_{H(\mu F)} = \frac{500000}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_{H(mH)} = \frac{500 \cdot \sqrt{2} \cdot R}{\pi \cdot F_O}$$

Cálculo dos Componentes Para Bessel ($1/\sqrt{3} = 0,577$) - Passa – Baixas

$$C_L = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_L = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{\sqrt{2} \cdot R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O}$$

$$C_{L(\mu F)} = \frac{500000}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_{L(mH)} = \frac{500 \cdot \sqrt{2} \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$$

Cálculo dos Componentes Para Chebychev (Q = 1) - Passa – Altas

$$C_H = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_H = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot 1}$$

$$C_H = \frac{0,5}{\pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_H = \frac{0,5 \cdot R}{\pi \cdot F_O}$$

$$C_{H(\mu F)} = \frac{500000}{\pi \cdot R \cdot F_O} \quad ; \quad L_{H(mH)} = \frac{500 \cdot R}{\pi \cdot F_O}$$

Cálculo dos Componentes Para Chebychev (Q = 1) - Passa – Baixas

$$C_L = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot Q}$$

$$C_L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{R_L}{2 \cdot \pi \cdot F_O \cdot 1}$$

$$C_L = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_L = \frac{0,5 \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$$

$$C_{L(\mu F)} = \frac{500000}{\pi \cdot R_L \cdot F_O} \quad ; \quad L_{L(mH)} = \frac{500 \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$$

Exemplo:

Projeto de um crossover Linkwitz-Riley, 12 dB/oitava, com o corte em 1200 Hz usando a Tabela 1.

$$C_H = \frac{250000}{\pi \cdot R \cdot F_O} = \frac{250000}{3,14 \cdot (10 + 8) \cdot 1200} = 3,68 \mu F$$

$$L_H = \frac{1000 \cdot R}{\pi \cdot F_O} = \frac{1000 \cdot (10 + 8)}{3,14 \cdot 1200} = 4,77 \text{ mH}$$

$$C_L = \frac{250000}{\pi \cdot R_L \cdot F_O} = \frac{250000}{3,14 \cdot 8 \cdot 1200} = 8,29 \mu F$$

$$L_L = \frac{1000 \cdot R_L}{\pi \cdot F_O} = \frac{1000 \cdot 8}{3,14 \cdot 1200} = 2,12 \text{ mH}$$

Os valores calculados acima, também podem ser obtidos na Tabela 4.

Crossovers Passivos - Duas Vias - 12 dB / 8^a				
Circuito Passa – Altas onde $R = R_a + R_H$ Conectar com a Polaridade Invertida				
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
$C_{H(\mu F)}$	$\frac{250000}{\pi \cdot R \cdot F_O}$	$\frac{500000}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R \cdot F_O}$	$\frac{500000}{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot R \cdot F_O}$	$\frac{500000}{\pi \cdot R \cdot F_O}$
$L_{H(mH)}$	$\frac{1000 \cdot R}{\pi \cdot F_O}$	$\frac{500 \cdot \sqrt{2} \cdot R}{\pi \cdot F_O}$	$\frac{500 \cdot \sqrt{3} \cdot R}{\pi \cdot F_O}$	$\frac{500 \cdot R}{\pi \cdot F_O}$
Circuito Passa - Baixas				
$C_{L(\mu F)}$	$\frac{250000}{\pi \cdot R_L \cdot F_O}$	$\frac{500000}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O}$	$\frac{500000}{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot R_L \cdot F_O}$	$\frac{500000}{\pi \cdot R_L \cdot F_O}$
$L_{L(mH)}$	$\frac{1000 \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$	$\frac{500 \cdot \sqrt{2} \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$	$\frac{500 \cdot \sqrt{3} \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$	$\frac{500 \cdot R_L}{\pi \cdot F_O}$

Tabela 1 - Cálculo dos componentes das vias passa-altas e passa-baixas, para diversos filtros.

Tabela 2 - Frequência de Corte - 800 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida) $R_a = 10 \Omega$ e $R_H = 8 \Omega$				
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
$C_{H(\mu F)}$	5,53	7,81	6,38	11,05
$L_{H(mH)}$	7,16	5,06	6,20	3,58
Passa – Baixas				
$C_{L(\mu F)}$	12,43	17,58	14,36	24,87
$L_{L(mH)}$	3,18	2,25	2,76	1,59

Tabela 3 - Frequência de Corte - 1000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida) $R_a = 10 \Omega$ e $R_H = 8 \Omega$				
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
$C_{H(\mu F)}$	4,42	6,25	5,10	8,84
$L_{H(mH)}$	5,73	4,05	4,96	2,87
Passa – Baixas				
$C_{L(\mu F)}$	9,95	14,07	11,47	19,89
$L_{L(mH)}$	2,55	1,80	2,21	1,27

Tabela 4 - Frequência de Corte - 1200 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida) $R_a = 10 \Omega$ e $R_H = 8 \Omega$				
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
$C_{H(\mu F)}$	3,68	5,21	4,25	7,37
$L_{H(mH)}$	4,77	3,38	4,14	2,39
Passa – Baixas				
$C_{L(\mu F)}$	8,30	11,72	9,57	16,58
$L_{L(mH)}$	2,12	1,50	1,84	1,06

Tabela 5 - Frequência de Corte - 2000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida)		Ra = 10 Ω e R _H = 8 Ω		
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
C _{H(μF)}	2,21	3,13	2,55	4,42
L _{H(mH)}	2,86	2,05	2,48	1,43
Passa – Baixas				
C _{L(μF)}	4,97	7,03	5,74	9,95
L _{L(mH)}	1,27	0,90	1,10	0,64

Tabela 6 - Frequência de Corte - 4000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida)		Ra = 10 Ω e R _H = 8 Ω		
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
C _{H(μF)}	1,11	1,56	1,28	2,21
L _{H(mH)}	1,43	1,01	1,24	0,72
Passa – Baixas				
C _{L(μF)}	2,49	3,52	2,87	4,97
L _{L(mH)}	0,64	0,45	0,55	0,32

Tabela 7 - Frequência de Corte - 5000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida)		Ra = 10 Ω e R _H = 8 Ω		
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
C _{H(μF)}	0,88	1,25	1,02	1,77
L _{H(mH)}	1,15	0,81	0,99	0,57
Passa – Baixas				
C _{L(μF)}	1,99	2,81	2,30	3,98
L _{L(mH)}	0,51	0,36	0,44	0,25

Tabela 8 - Frequência de Corte - 6000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida)		Ra = 10 Ω e R _H = 8 Ω		
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
C _{H(μF)}	0,74	1,04	0,85	1,47
L _{H(mH)}	0,95	0,68	0,83	0,48
Passa – Baixas				
C _{L(μF)}	1,66	2,34	1,91	3,31
L _{L(mH)}	0,42	0,30	0,37	0,21

Tabela 9 - Frequência de Corte - 7000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida)		Ra = 10 Ω e R _H = 8 Ω		
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
C _{H(μF)}	0,63	0,89	0,73	1,26
L _{H(mH)}	0,82	0,58	0,71	0,41
Passa – Baixas				
C _{L(μF)}	1,42	2,01	1,64	2,84
L _{L(mH)}	0,36	0,26	0,32	0,18

Tabela 10 - Frequência de Corte - 8000 Hz				
Passa – Altas (Conectar Invertida)		Ra = 10 Ω e R _H = 8 Ω		
	Linkwitz-Riley	Butterworth	Bessel	Chebychev
C _{H(μF)}	0,55	0,78	0,64	1,11
L _{H(mH)}	0,72	0,51	0,62	0,36
Passa – Baixas				
C _{L(μF)}	1,24	1,76	1,44	2,49
L _{L(mH)}	0,32	0,23	0,28	0,16

Escalamento em Frequência

Se quisermos modificar o circuito para outra frequência de corte, por exemplo, dez vezes menor, ou seja, igual a 120 Hz, bastará multiplicar por 10 os valores dos componentes reativos, ou seja, os indutores e os capacitores.

Caso a frequência desejada seja 5 vezes maior, ou seja, 6000 Hz, bastaria dividir por 5 os valores dos indutores e dos capacitores. Assim sendo, C_L que vale $8,29 \mu\text{F}$ para 1200 Hz, será igual $8,29/5$, ou seja, $1,66 \mu\text{F}$, para um corte em 6000 Hz. Isto pode ser comprovado na Tabela 7.

Escalamento em Impedância

Para alterarmos as impedâncias R ou R_L , sem modificar as frequências de corte, deveremos manter inalteradas as constantes de tempo, tanto capacitivas ($R \cdot C$) quanto indutivas (L / R). Desse modo, se dividirmos por dois a resistência, deveremos dobrar o valor do capacitor e reduzir pela metade o valor do indutor.

No caso do exemplo anterior, onde a frequência de corte valia 1200 Hz e a carga 8 Ohms, se a nova impedância R_L for igual a 4 Ohms, deveremos usar um capacitor de $16,58 \mu\text{F}$ e um indutor de $1,06 \text{mH}$, no lugar de $8,29 \mu\text{F}$ e $2,12 \text{mH}$, respectivamente.

No caso da via passa-altas, a resistência de atenuação R_a deverá variar na mesma proporção que a carga, para manter a atenuação inalterada.

Impedâncias de Entrada

$$Z_{in_{H(s)}} = \frac{s^2 \cdot R_H \cdot L_H \cdot C_H + s \cdot L_H + R_H}{s^2 \cdot L_H \cdot C_H + s \cdot R_H \cdot C_H} \quad ; \quad Z_{in_{L(s)}} = \frac{s^2 \cdot R_L \cdot L_L \cdot C_L + s \cdot L_L + R_L}{s \cdot R_L \cdot C_L + 1}$$

$$Z_{in(s)} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{in_{H(s)}}} + \frac{1}{Z_{in_{L(s)}}}}$$

$$Z_{in(s)} = \frac{1}{\frac{s^2 \cdot L_H \cdot C_H + s \cdot R_H \cdot C_H}{s^2 \cdot R_H \cdot L_H \cdot C_H + s \cdot L_H + R_H} + \frac{s \cdot R_L \cdot C_L + 1}{s^2 \cdot R_L \cdot L_L \cdot C_L + s \cdot L_L + R_L}}$$

Quando os componentes das vias passa-altas e passa-baixas forem respectivamente iguais, vem:

$$Z_{in_{H(s)}} = \frac{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot R \cdot C} \quad ; \quad Z_{in_{L(s)}} = \frac{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R}{s \cdot R \cdot C + 1}$$

$$Z_{in(s)} = \frac{1}{\frac{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot R \cdot C}{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R} + \frac{s \cdot R \cdot C + 1}{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R}}$$

$$Z_{in(s)} = \frac{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot R \cdot C + s \cdot R \cdot C + 1} \quad \therefore \quad Z_{in(s)} = \frac{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot 2 \cdot R \cdot C + 1}$$

$$Z_{in(s)} = \frac{s^2 \cdot R \cdot L \cdot C + s \cdot L + R}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot 2 \cdot R \cdot C + 1} \quad \therefore \quad Z_{in(s)} = R \cdot \frac{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot \frac{L}{R} + 1}{s^2 \cdot L \cdot C + s \cdot 2 \cdot R \cdot C + 1}$$

$$Z_{in(s)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{1}{R \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s^2 + s \cdot \frac{2 \cdot R}{L} + \frac{1}{L \cdot C}} \quad \therefore \quad Z_{in(s)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{L}{R \cdot L \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}{s^2 + s \cdot \frac{2 \cdot R \cdot C}{L \cdot C} + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$Z_{in(s)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot L}{R} + \omega_0^2}{s^2 + s \cdot \omega_0^2 \cdot 2 \cdot R \cdot C + \omega_0^2}$$

Utilizando as relações obtidas para o cálculo dos componentes, em função do Q, e adaptando-as para

$R_H = R_L = R$, $C_H = C_L = C$ e $L_H = L_L = L$, vem:

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 \cdot Q} \quad \text{e} \quad R \cdot C = \frac{Q}{\omega_0} \quad \text{Logo,}$$

$$Z_{in(s)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot L}{R} + \omega_0^2}{s^2 + s \cdot \omega_0^2 \cdot 2 \cdot R \cdot C + \omega_0^2} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_0 \cdot Q} + \omega_0^2}{s^2 + s \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{2 \cdot Q}{\omega_0} + \omega_0^2}$$

$$Z_{in(s)} = R \cdot \frac{s^2 + s \cdot \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{s^2 + s \cdot 2 \cdot Q \cdot \omega_0 + \omega_0^2}$$

$$Z_{in(s)} = R \cdot \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} \cdot 2 \cdot Q + 1}$$

Impedância Constante

Quando a impedância de entrada, vista pelo amplificador, ao alimentar simultaneamente as vias passa-altas e passa-baixas é constante e puramente resistiva, a potência fornecida é constante daí estes circuitos serem chamados de Impedância Constante ou Potência Constante.

Para que isto aconteça, é necessário que o numerador e o denominador da equação abaixo, sejam iguais.

$$Z_{in(s)} = R \cdot \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} \cdot 2 \cdot Q + 1} \quad \text{se } \frac{1}{Q} = 2 \cdot Q \quad \text{então } Z_{in(s)} = R$$

$$\text{Logo, } Q^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{que corresponde ao caso Butterworth.}$$

$$\text{Fazendo } s = j \cdot \omega \quad \text{em } Z_{in(s)} = R \cdot \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0} \cdot 2 \cdot Q + 1} \quad \text{vem:}$$

$$Z_{in(j\omega)} = R \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot 2 \cdot Q}$$

Para $\omega = \omega_0$

$$Z_{in(\omega_0)} = R \cdot \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{Q}}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot 2 \cdot Q} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot Q}$$

$$Z_{in(\omega_0)} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot Q^2}$$

Para o caso Linkwitz-Riley, onde $Q = 0,5$, vem:

$$Z_{in(\omega_0)} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot Q^2} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$Z_{in(\omega_0)} = 2 \cdot R$$

Para o caso Butterworth, onde $Q = 1/\sqrt{2}$, vem:

$$Z_{in(\omega_0)} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot Q^2} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = R \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$Z_{in(\omega_0)} = R$$

Raízes do Polinômio $D_{(s)}$

O polinômio $D_{(s)}$, no denominador das funções de transferência dos filtros de segunda ordem que estamos analisando, determina o tipo de resposta do filtro. As características do filtro podem ser analisadas através das raízes do polinômio no denominador.

$$GH_{(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2} \quad ; \quad GL_{(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2}$$

$$D_{(s)} = s^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot s + \omega_0^2$$

$D_{(s)}$ terá sempre duas raízes, que poderão ser reais e desiguais, reais e iguais ou conjugadas complexas.

Essas raízes serão os pólos das funções de transferência passa-altas e passa-baixas .

$$\sigma_1, \sigma_2 = -\frac{\omega_0}{2 \cdot Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2 \cdot Q}\right)^2 - \omega_0^2} = -\frac{\omega_0}{2 \cdot Q} \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \cdot Q^2} - 1}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = -\omega_0 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \cdot Q^2} - 1} \right)$$

Raízes Reais : $Q \leq 0.5$

Para $Q < 0.5$ Teremos duas raízes reais e desiguais:

$$\sigma_1 = -\omega_0 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot Q} + \sqrt{\frac{1}{4 \cdot Q^2} - 1} \right) \quad ; \quad \sigma_2 = -\omega_0 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot Q} - \sqrt{\frac{1}{4 \cdot Q^2} - 1} \right)$$

$$D_{(s)} = (s + \sigma_1) \cdot (s + \sigma_2) = s^2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot s + \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \sigma_1 + \sigma_2 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

Para $Q = 0.5$ Teremos duas raízes reais e iguais;

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{-\omega_0}{2 \cdot Q}$$

$$D_{(s)} = (s + \sigma)^2 = s^2 + 2 \cdot \sigma \cdot s + \sigma^2$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2 \cdot \sigma \quad ; \quad \omega_0 = \sigma$$

Raízes Complexas : $Q > 0.5$

$$\sigma_1 = a + j \cdot b = -\omega_0 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot Q} + j \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q^2}} \right)$$

$$\sigma_2 = a - j \cdot b = -\omega_0 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot Q} - j \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q^2}} \right)$$

$$a = \frac{-\omega_0}{2 \cdot Q} \quad ; \quad b = -\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot Q^2}}$$

$$D_{(s)} = (s + \sigma_1) \cdot (s + \sigma_2) = (s + a + j \cdot b) \cdot (s + a - j \cdot b)$$

$$D_{(s)} = s^2 + (a - j \cdot b) \cdot s + (a + j \cdot b) \cdot s + (a + j \cdot b) \cdot (a - j \cdot b)$$

$$D_{(s)} = s^2 + 2 \cdot a \cdot s + a^2 + b^2$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2 \cdot a \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Otimização por Software

A abordagem anterior, peca pela simplificação excessiva ao considerar a impedância elétrica, vista pelos circuitos de filtro, para dentro das bobinas dos transdutores, como sendo constante e igual à impedância nominal de cada um deles.

Atualmente, tornam-se cada vez mais comuns softwares capazes de levar em conta as curvas reais, não só da impedância elétrica e da sua fase, como também as pressões acústicas produzidas pelos transdutores e suas fases acústicas.

Alem disso, utilizando métodos numéricos, esses programas podem otimizar a rede divisora de frequência, abrindo novas possibilidades, impossíveis de serem conseguidas simplesmente com o uso das tradicionais tabelas.

Para ilustrar essa nova possibilidade, primeiramente usamos as tabelas fornecidas anteriormente, e calculamos um crossover Linkwitz-Riley, de 12 dB / Oitava, com o corte em 800 Hz, para um sistema duas vias, utilizando o alto falante 15SW1P e o driver D3300Ti, montado na corneta HL1450, todos fabricados pela SELENIUM (www.selenium.com.br) .

Os transdutores foram montados na caixa trapezoidal, mostrada na Fig. 51, e antes da instalação do crossover, construído pela NENIS (www.nenis.com.br), foram obtidas, em câmara anecóica, as curvas de resposta de cada uma das vias, independentemente, com o microfone posicionado no eixo do driver, a um metro de distância dele, alem das curvas de fase acústica e do módulo e da fase da impedância elétrica, em cada uma das bobinas.

Os dados assim coletados alem de disponíveis na forma de gráficos, foram convertidos em arquivos texto, no formato FMP (Frequency – Magnitude – Phase) para uso dos programas otimizadores. Esse formato apresenta as informações em três colunas de texto: na primeira, temos as frequências utilizadas; na segunda coluna vêm as informações referentes ao módulo da impedância elétrica ou o nível de pressão acústica em dB (SPL); por ultimo, temos a fase, que será elétrica ou acústica, conforme o caso. Na tabela 11 vemos o formato típico parte de um desses arquivos.

Foram utilizados dois programas:

1 - Bassyst, versão 2.1, desenvolvido por Gottfried Behler, Dr. (gkb@akustik.rwth-aachen.de) ;

2 – DivCalc, desenvolvido por André Luís Dalcastagnê, MsC (andre@linse.ufsc.br), da UFSC.

Tabela 11 – Arquivo FMP		
"Freq	Imp.	Fase "
20,0000	39,7241	62,9295
20,6000	48,4662	59,5534
21,2000	60,3084	53,3375
21,8000	76,8311	43,1904
22,4000	97,4623	24,6927
23,0000	104,432	-2,02608
23,6000	88,5607	-26,0428
24,3000	65,3407	-42,5978
25,0000	49,1744	-50,7292
25,8000	37,4494	-54,7564
26,5000	30,6865	-55,9457
27,2000	25,8933	-55,7955
28,0000	21,9585	-54,5999

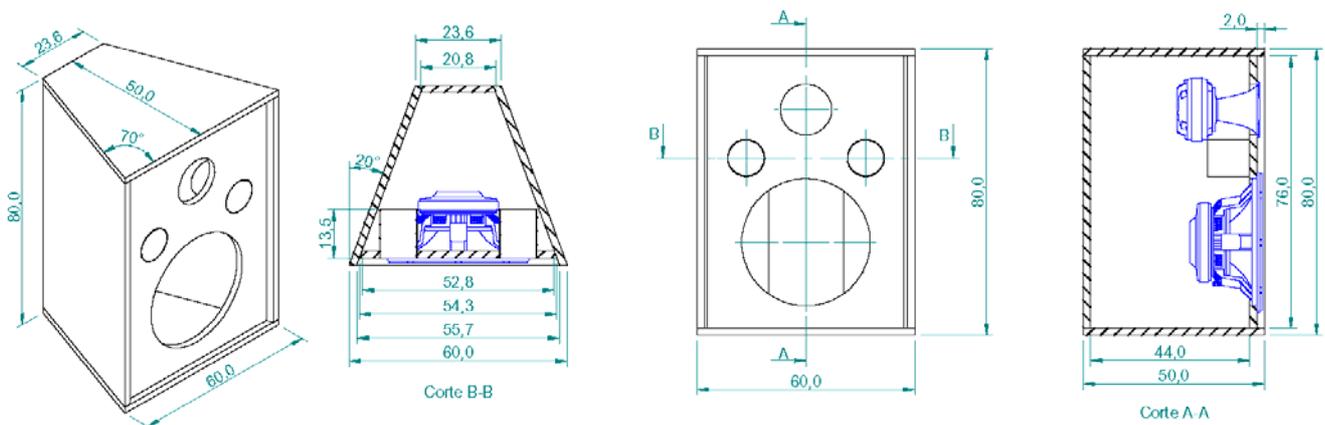


Fig. 51 – Caixa usada nas medições. O desenho detalhado pode ser obtido na SELENIUM pelo código VB15SW-A2.

Caso Ideal

Através das tabelas fornecidas anteriormente, foram calculados os componentes mostrados nas Figs. 52 e 53, onde os transdutores, considerados ideais, possuem um comportamento puramente resistivo, com fase nula, e resposta perfeitamente plana. Os indutores, também ideais, possuem resistência nula.

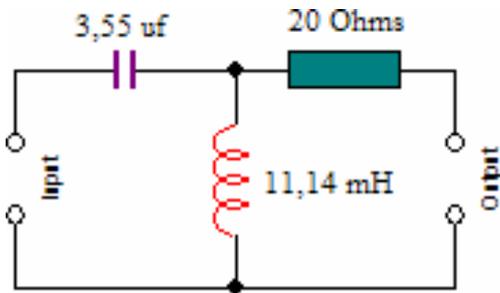


Fig. 52 – Passa-altas do tipo Linkwitz-Riley com o corte em 800 Hz

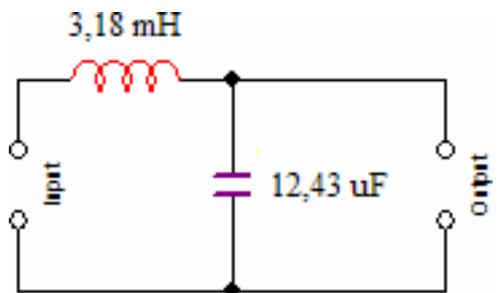


Fig. 53 – Passa-baixas correspondente à Fig. 52.

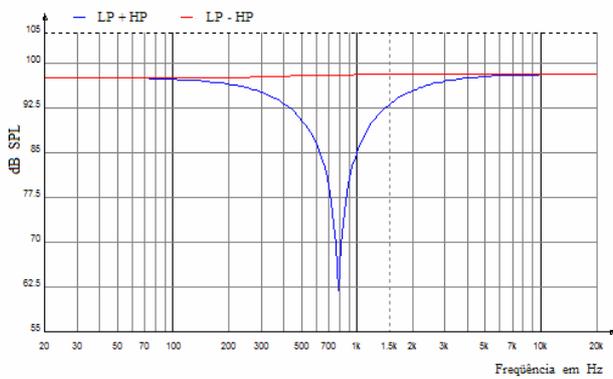


Fig.54 – Respostas LP + HP e LP – HP, caso ideal.

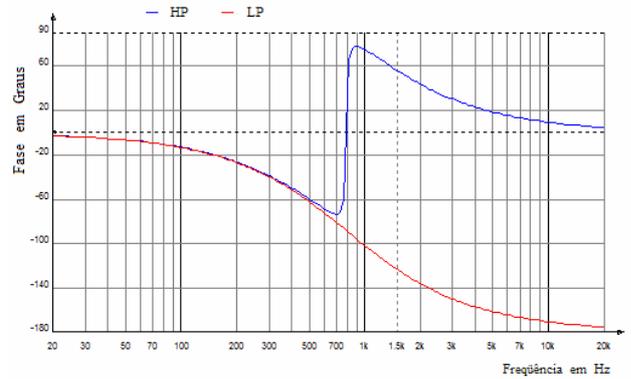


Fig.55 – Fases das respostas LP e HP, caso ideal atenuado.

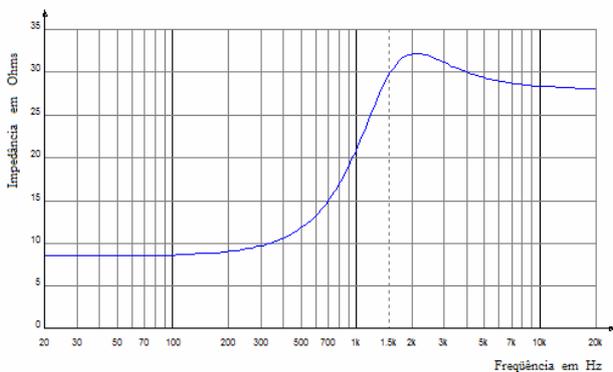


Fig. 56 – Módulo da impedância elétrica, caso ideal.

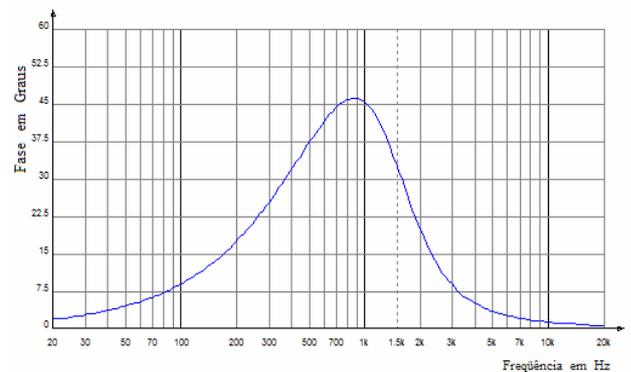


Fig. 57 – Fase da impedância elétrica, caso ideal.

Esta situação, simplificada, leva às curvas mostradas na Fig. 54 que retratam as respostas ideais dos filtros Linkwitz-Riley, onde a soma das vias passa-baixas (LP) com a passa-altas (HP) provocou o esperado cancelamento na frequência de corte enquanto que a soma com a via HP, invertida, produziu uma perfeita reconstituição do módulo do sinal de entrada.

A Fig. 55 mostra as fases das respostas LP e HP, onde o resistor de atenuação influenciou na fase acústica.

O resistor de 20 Ohms proporcionou uma atenuação de aproximadamente 11 dB, necessária devido à elevada eficiência do driver.

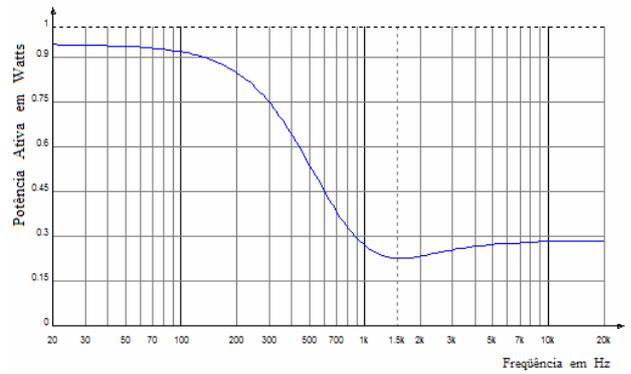


Fig. 57 – Potência elétrica fornecida @ 2,83 V, caso ideal.

A impedância vista pelo amplificador está mostrada na Fig.56, onde vemos que esta, acima da frequência de ressonância, sofre considerável acréscimo devido ao resistor de atenuação, resistor este responsável pela diminuição da potência fornecida pelo amplificador (alimentado com 2,83 Volts) ao driver, conforme a Fig. 57. Desse modo, o driver além de ficar protegido contra potências excessivas, tem sua resposta equalizada em relação à eficiência do falante, que é muito menor.

Caso Real

Com o falante e o driver ideais substituídos pelos produtos 15SW1P e D3300Ti, vamos encontrar uma situação um tanto diferente daquela presente no caso teórico. Uma das principais razões para isso reside na complexa relação das fases acústicas e nas irregularidades das curvas de resposta. Nas Figs. 56 e 57 vemos as respostas em amplitude (SPL) e a de fase, referentes ao falante 15SW1P e ao driver D3300Ti, instalados na caixa da Fig. 51, obtidas em câmara anecóica, com o microfone a 1 m do driver, alinhado com o eixo do mesmo.

Devido à maior eficiência do driver, o que fica evidenciado nas curvas de resposta, o uso de um resistor de atenuação torna-se obrigatório.

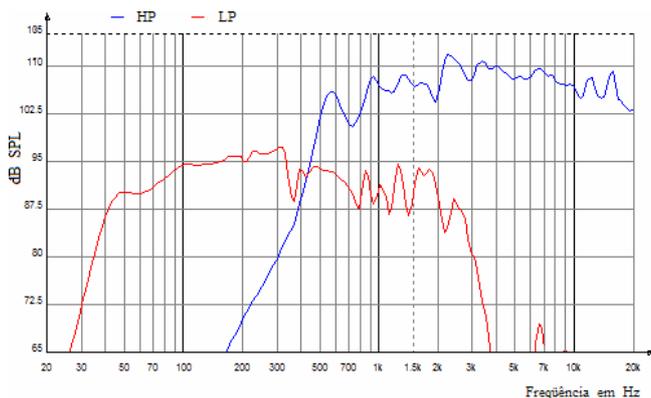


Fig.5 8 – Respostas em amplitude dos transdutores, na caixa.

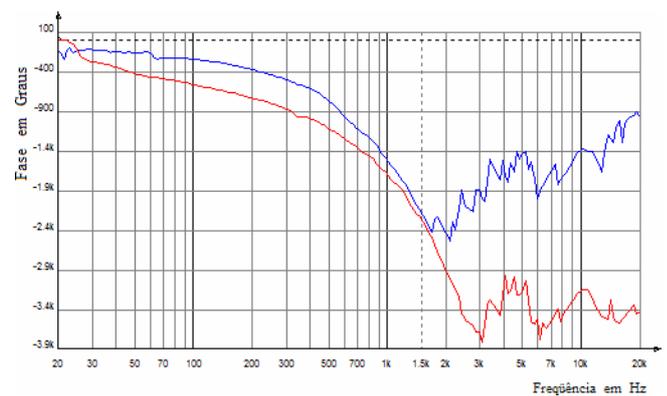


Fig.5 9 – Respostas de fase correspondentes à Fig. 58 .

Usando o Bassyst

Este programa permite que as diversas respostas de interesse, relativas a um sistema acústico, sejam obtidas com grande precisão quando os dados referentes aos transdutores são informados a partir de arquivos texto, obtidos através de medições em câmara anecóica.

Alem das respostas em amplitude e de fase, dos transdutores montados na caixa a ser utilizada, conforme as Figs. 58 e 59, foram medidos, também, o módulo e a fase da impedância vista pelas bobinas do falante e do driver, separadamente.

Partindo do circuito de crossover calculado no caso ideal, o programa foi instruído no sentido de otimizar os componentes para uma resposta o mais plana possível em amplitude, resultando os circuitos das Figs. 60, 61 e 62.

Na Fig. 60, vemos que o circuito otimizado utilizou um resistor de 2382 Ohms, em série com um indutor de 0,01 mH. Como esse valor era muito elevado em relação às demais impedâncias, simplesmente foi o mesmo omitido, juntamente com o indutor em série com ele, o que resultou no circuito da Fig. 61, que é um filtro de 6 dB por oitava.

O circuito passa-baixas, obtido, pode ser visto na Fig. 62.

Devemos notar que os indutores agora incorporam a inevitável resistência do enrolamento, que não foi levada em conta no caso ideal. Esta resistência deve ser a menor possível, de modo a não alterar o fator de qualidade do transdutor. Segundo a teoria de Thiele-Small, a resistência a ser colocada em série não deveria ser superior a 5% da impedância do transdutor, de modo a não alterar o timbre da resposta. Para um falante de 8 ohms, isto corresponde a 0,4 Ohms. Os baixos valores de resistência aumentam significativamente o preço e o volume dos indutores, daí a tendência de se utilizar resistências acima do recomendado. Em nosso caso, utilizamos uma indutância de 2,7 mH, com uma resistência de 0,5 Ohm.

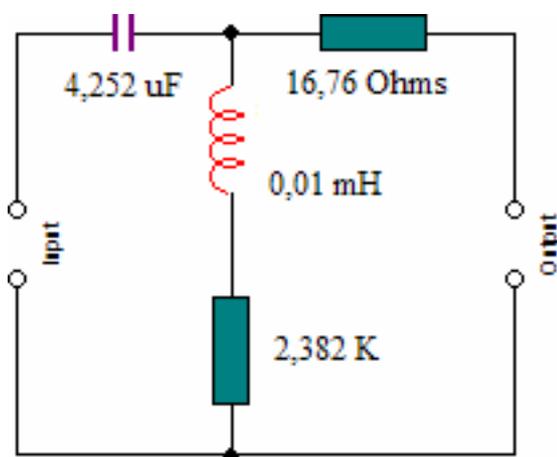


Fig. 60 – Otimização com o Bassyst para a via HP.

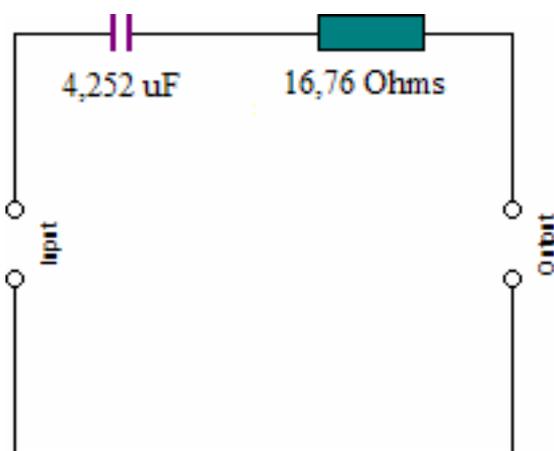


Fig. 61 – Simplificação do circuito da Fig 10.

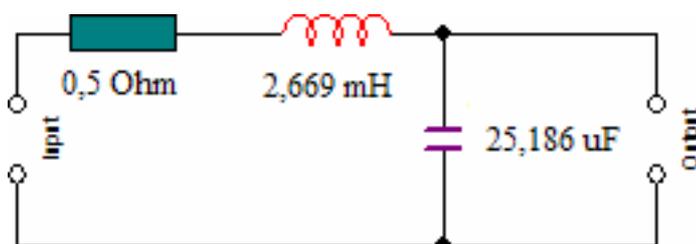


Fig. 62 – Otimização com o Bassyst para a via LP.

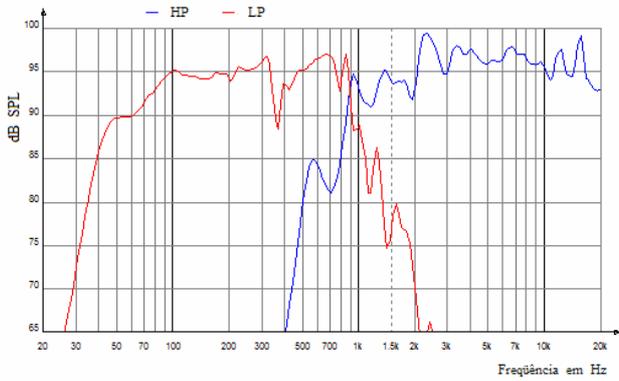


Fig. 63 – Respostas dos transdutores, na caixa - Bassyst.

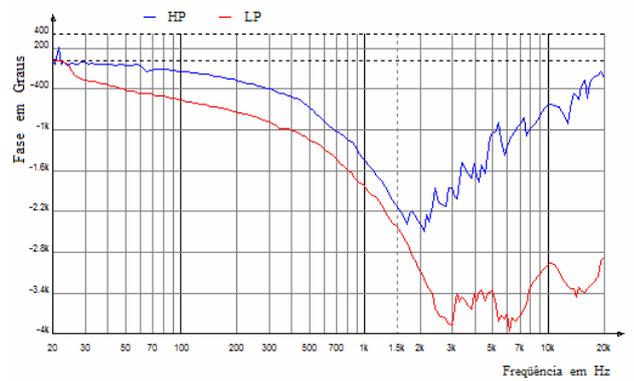


Fig. 64 – Respostas de fase correspondentes à Fig. 63.

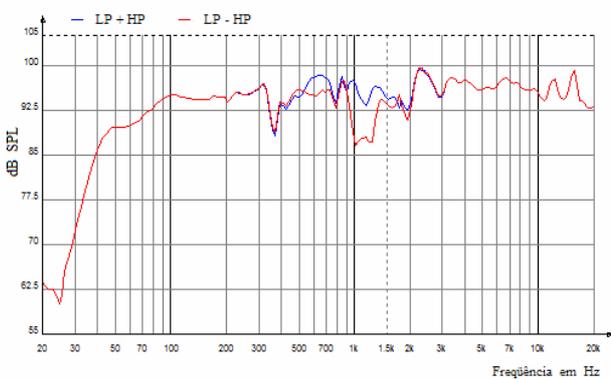


Fig. 65 – Respostas LP + HP e LP - HP - Bassyst.

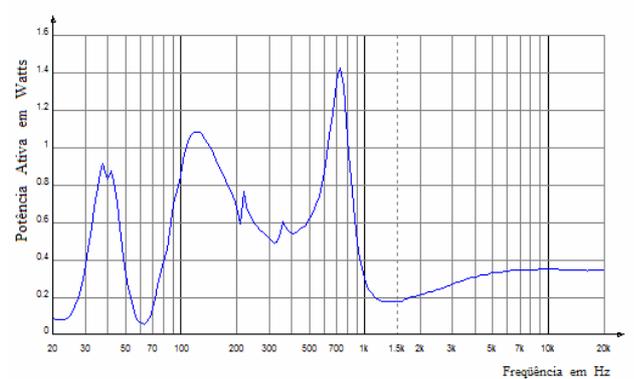


Fig. 66 – Potência elétrica fornecida @ 2,83 V - Bassyst.

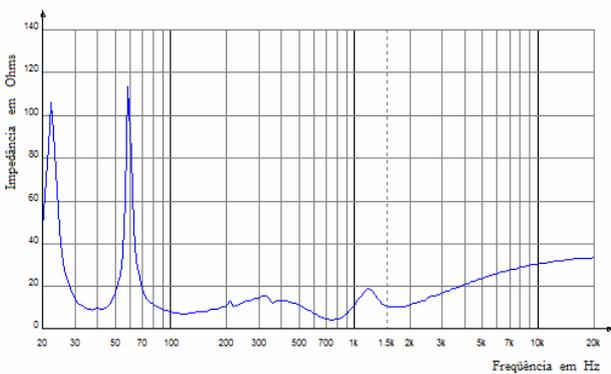


Fig. 67 – Módulo da impedância elétrica - Bassyst.

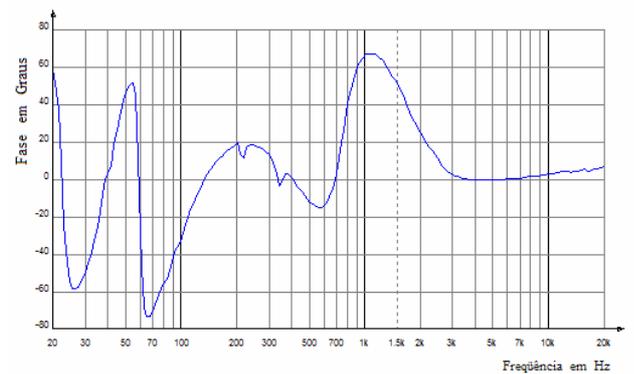


Fig. 68 – Fase da impedância elétrica - Bassyst.

Segundo as respostas de amplitude e fase, mostradas nas Figs. 63 e 64, o melhor neste caso seria a ligação da via passa-altas sem a inversão recomendada no caso ideal.

A impedância elétrica, na região de crossover, passa por um ponto de mínimo, conforme mostra a Fig. 67, o que acarretou o pico na potência consumida do amplificador, mostrado na Fig. 66.

A fase da impedância vista pelo amplificador, é bastante complexa, passando por regiões capacitivas (fase negativa) diversas vezes, o que vai exigir maior “competência” do amplificador de modo a não tornar-se instável.

Usando o DivCalc

Este programa, desenvolvido no ambiente MatLab, possibilita que diversos tipos de crossovers passivos sejam otimizados desde que as respostas de fase e amplitude, bem como o módulo da impedância e sua fase, sejam fornecidos em arquivo texto, no formato FMP.

Como esses dados são obtidos nas condições reais de uso, a simulação do crossover é muito precisa, sendo desprezível o erro do processo. Isso também vale para o Bassyst.

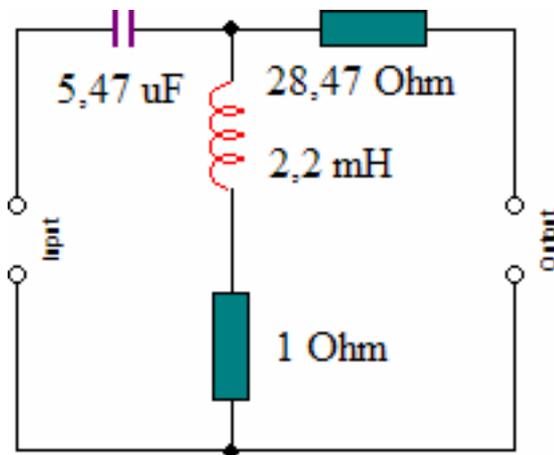


Fig. 69 – Otimização com o DivCalc para a via HP.

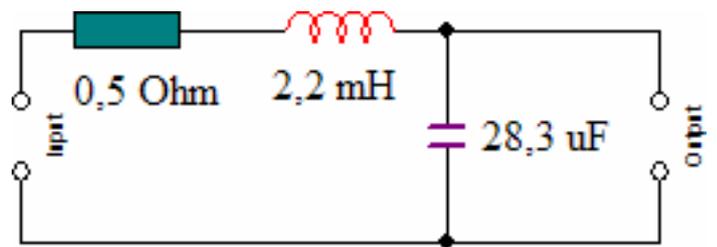


Fig. 70 – Simplificação do circuito da Fig 69.

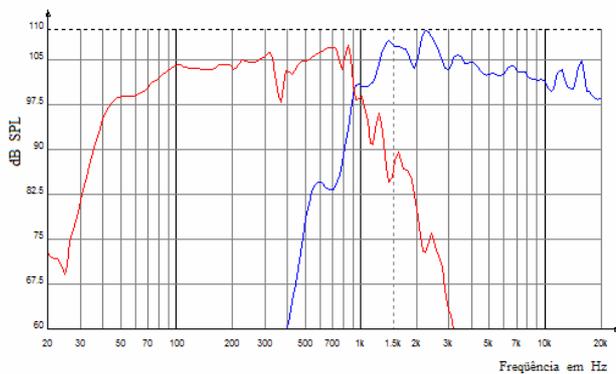


Fig. 71 – Respostas dos transdutores, na caixa - DivCalc.

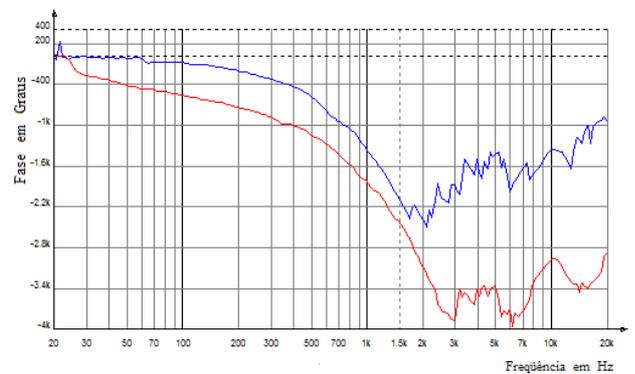


Fig. 72 – Respostas de fase correspondentes à Fig. 71.

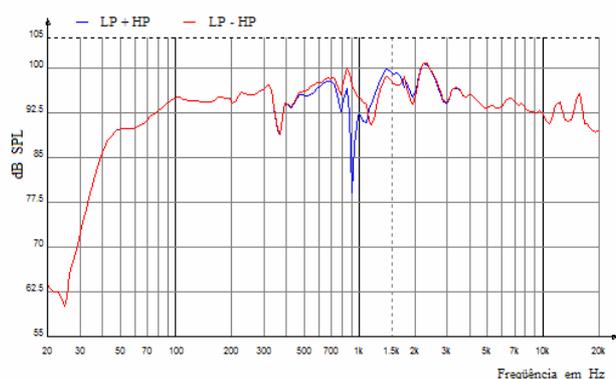


Fig. 73 – Respostas LP + HP e LP - HP - DivCalc.

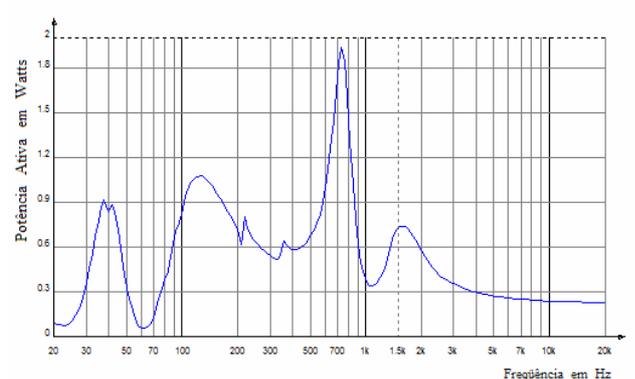


Fig. 74 – Potência elétrica fornecida @ 2,83 V- DivCalc.

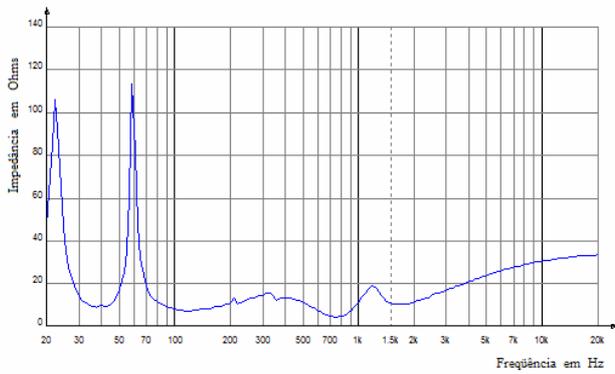


Fig. 75 – Módulo da impedância elétrica - DivCalc.

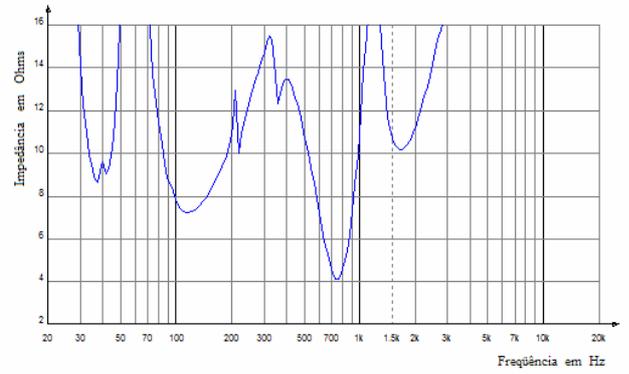


Fig. 76 – Ampliação da Fig. 75.

Ainda neste caso, de modo semelhante ao que aconteceu com o circuito otimizado pelo Bassyst, o melhor seria a ligação da via passa-altas sem a inversão de polaridade, conforme mostra a Fig. 73 .

A potência consumida, próxima da frequência de corte, foi muito elevada, chegando a quase 2 Watts. Como a tensão aplicada era igual a 2,83 V, que produz 1 Watt em uma carga de 8 Ohms, podemos concluir que a impedância naquela região gira em torno de 4 Ohms, o que pode ser comprovado na curva da impedância ampliada, mostrada na Fig. 76.

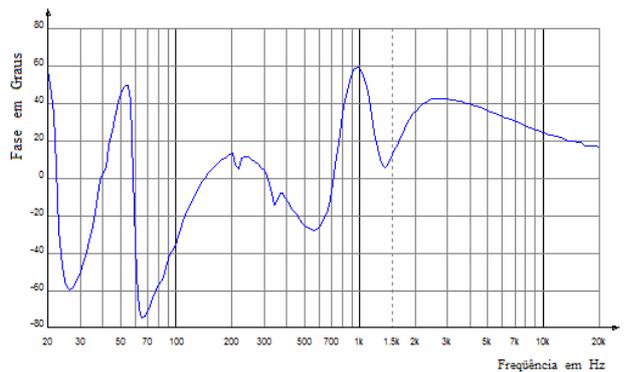


Fig. 77 – Fase da impedância elétrica - DivCalc.

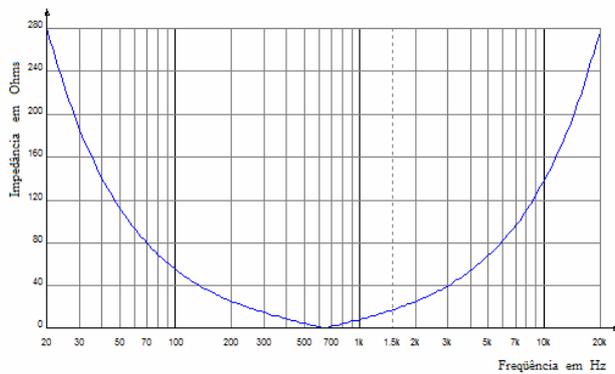


Fig. 78 – Impedância da via LP, sem carga - DivCalc.

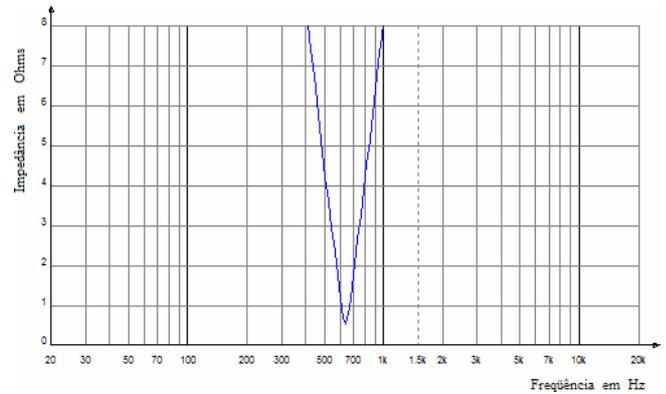


Fig. 79 – Ampliação da Fig. 78.

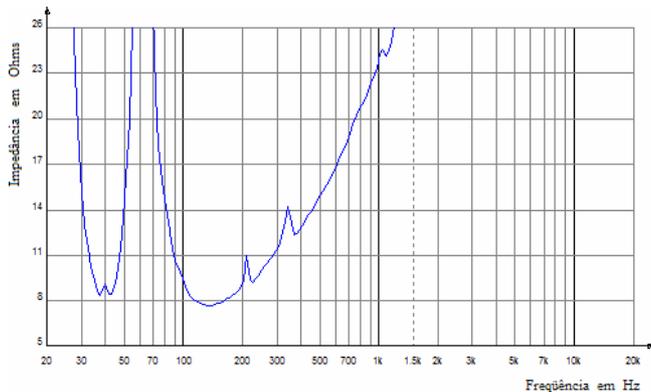


Fig. 80 – Impedância da caixa, sem crossover.

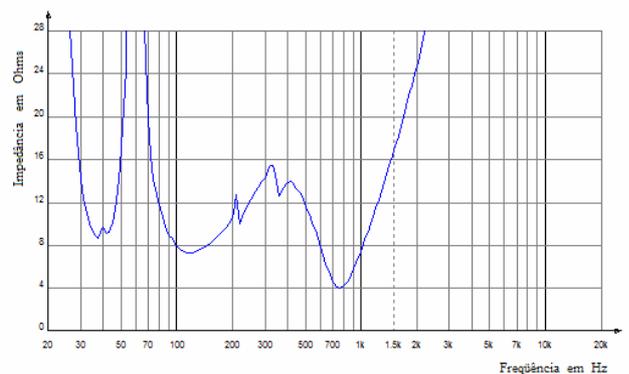


Fig. 81 – Impedância da via LP, com crossover - DivCalc.

Esta baixa impedância é o resultado da combinação das impedâncias do circuito do crossover, com aquelas refletidas nas bobinas dos transdutores, ou seja, falante e driver.

O principal responsável por esse fato é o crossover da via passa-baixas, com sua bobina de baixa resistência. Para comprovar essa afirmativa, basta analisar a curva das Figs. 78 e 79, que corresponde à impedância de entrada do crossover da via passa-baixas, sem carga, ou seja, com a caixa desconectada. Como podemos ver, a impedância assume um valor mínimo igual a 0,5 ohm, correspondente à resistência da bobina utilizada. De fato, consultando a Fig. 80, vemos que o circuito passa-baixas comporta-se como um circuito ressonante série, quando seus terminais de saída estiverem em aberto. Neste caso, a impedância na ressonância série valerá 0,5 Ohm, conforme podemos ver na Fig. 79, e a frequência de ressonância seria dada pela equação que se segue:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{2,2 \cdot 10^{-3} \cdot 28,3 \cdot 10^{-6}}} = 638 \text{ Hz}$$

Resumindo, crossovers passivos, de alto desempenho, que por esse motivo apresentam bobinas com baixa resistência, não devem ser ligados ao amplificador sem que a carga esteja devidamente acoplada aos terminais da rede divisora, uma vez que o amplificador poderá não suportar a baixa impedância na frequência de ressonância do circuito.

O que foi visto acima também se aplica ao circuito passa-altas, que utilizou uma bobina de mesmo valor que a via passa-baixas, mas com o dobro da resistência, ou seja, 1 Ohm, conforme a Fig. 82.

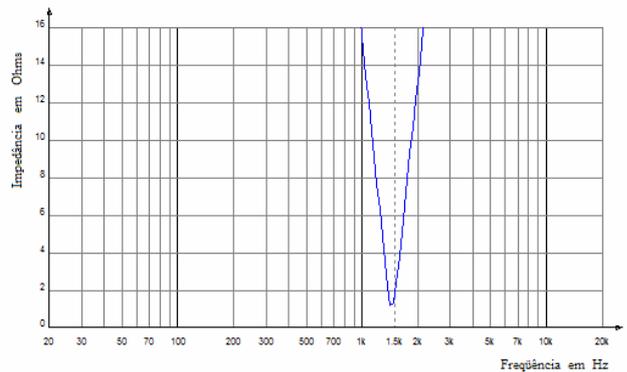


Fig. 82 – Impedância da via HP, sem carga - DivCalc.

Alem disso, o Bassyst foi instruído para não aceitar indutores com mais de 2,2 mH, por razões práticas, o que influenciou significativamente nos resultados.

Devemos ressaltar, também, que as figuras apresentadas neste item, foram geradas pelo Bassyst, mas a partir dos valores calculados pelo Divcalc. Isto foi feito no sentido de uniformizar o visual e os recursos oferecidos pelos softwares.

O DivCalc é um programa que, além de gratuito, oferece opções inexistentes em muitos softwares comerciais. Na Fig. 83 vemos a tela de abertura deste programa enquanto a Fig. 84 mostra a tela de trabalho Para projeto de vias passa-altas de segunda ordem, onde podemos notar os diversos componentes, opcionais, disponíveis para a correção da curva de resposta.



Fig. 83 – Tela de abertura do programa DivCalc.

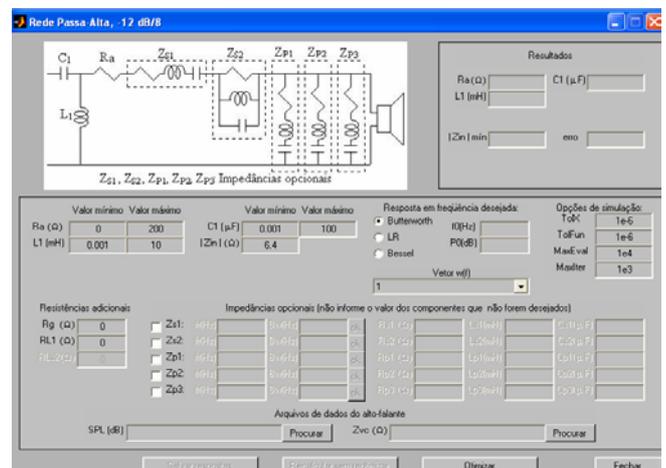


Fig. 84 – Otimização de via HP, 12 dB/Oitava - DivCalc.

Bibliografia

- 1 - On the Transient Response of Ideal Crossover Networks
J. Robert Ashley
Journal of The Audio Engineering Society, Vol. 10, Nº 3, 1962
- 2 – Constant Voltage Crossover Network Design
Richard H. Small
Journal of The Audio Engineering Society, Vol. 19, Nº 1, 1971
- 3 – Operational Amplifier Implementation of Ideal Electronic Crossover Networks
J. Robert Ashley
Journal of The Audio Engineering Society, Vol. 19, Nº 1, 1971
- 4 – Unit Sum Electronic Crossover
Steven J. Gunderson
Apresentado na 51st Convention Audio Engineering Society, 13-16 Maio, 1975
- 5 – All-Pass Crossover Systems
Peter Garde
Journal of The Audio Engineering Society, Vol. 28, Nº 9, 1980
- 6 – Simple Subtractive Crossovers
Eric Guarin
Apresentado na 81st Convention Audio Engineering Society, 12-16 Novembro, 1986
- 7 – Loudspeaker Crossover Look Back Impedance
Jon M. Risch
Apresentado na 105st Convention Audio Engineering Society, 26-29 Setembro, 1998
- 8 - Filtros Seletores de Sinais
Sidnei Noceti Filho, D.Sc.
Editora da UFSC – 1998
- 9 - Desenvolvimento de Um Programa para Projeto de Divisores de Frequência Passivos
André Luís Dalcastagnê, MsC
Dissertação de Mestrado – UFSC - 2002
- 10 – Comunicações Particulares
Sidnei Noceti Filho, D.Sc.
UFSC – 2002

Agradecimentos

O Autor agradece:

À ELETRÔNICA SELENIUM S.A. pelos suportes técnico e financeiro que tornaram possível a execução do presente trabalho, a quem exime de quaisquer responsabilidades referentes ao conteúdo deste trabalho, que é da inteira responsabilidade do Autor;

Ao Jeferson Mundel, do IGAP – INSTITUTO GAUCHO DE ÁUDIO PROFISSIONAL, pela execução de experiências relativas à comprovação da audibilidade de alguns aspectos abordados neste trabalho.

ANEXO 1

Respostas ao Degrau e ao Impulso Utilizando o MatLab

```
% XOVERS.m
% XOVERS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDENS
% Respostas ao Degrau e ao Impulso
% By Homero Sette Silva em 10-11-02 homero@selenium.com.br

clear all ; close all ; clc
syms x

T = (0 : 0.01 : 10) ;

%      R      G      B
cores = [0      0      1
         1      0      0
         0.6    0      0.6
         0.2    0.6    0
         1      0.8    0
         1      0.4    0
         0      0      0] ;

set(0, 'DefaultAxesPlotBoxAspectRatioMode','manual' , ...
     'DefaultAxesPlotBoxAspectRatio', [1 1/2.5 1] , ...
     'DefaultAxesColorOrder', cores )

% Respostas ao Degrau Primeira Ordem

SGBu1LP = [tf([1],[1 1])] ; SSGBu1LP = ss(SGBu1LP) ; [SBu1LP , T] = step(SSGBu1LP , T) ;
SGBu1HP = [tf([1 0],[1 1])] ; SSGBu1HP = ss(SGBu1HP) ; [SBu1HP , T] = step(SSGBu1HP , T) ;
SGBu1Inv = [tf([-1 1],[1 1])] ; SSGBu1Inv = ss(SGBu1Inv) ; [SBu1Inv , T] = step(SSGBu1Inv , T) ;
SGBu1Nor = [tf([1 1],[1 1])] ; SSGBu1Nor = ss(SGBu1Nor) ; [SBu1Nor , T] = step(SSGBu1Nor , T) ;

% Respostas ao Impulso Primeira Ordem

[IBu1LP , T] = impulse(SSGBu1LP , T) ; [IBu1HP , T] = impulse(SSGBu1HP , T) ;
[IBu1Inv , T] = impulse(SSGBu1Inv , T) ; [IBu1Nor , T] = impulse(SSGBu1Nor , T) ;

% Respostas ao Degrau Segunda Ordem - Butterworth

SGBu2LP = [tf([1],[1 sqrt(2) 1])] ; SSGBu2LP = ss(SGBu2LP) ; [SBu2LP , T] = step(SSGBu2LP , T) ;
SGBu2HP = [tf([1 0 0],[1 sqrt(2) 1])] ; SSGBu2HP = ss(SGBu2HP) ; [SBu2HP , T] = step(SSGBu2HP , T) ;
SGBu2Inv = [tf([-1 0 1],[1 sqrt(2) 1])] ; SSGBu2Inv = ss(SGBu2Inv) ; [SBu2Inv , T] = step(SSGBu2Inv , T) ;
SGBu2Nor = [tf([1 0 1],[1 sqrt(2) 1])] ; SSGBu2Nor = ss(SGBu2Nor) ; [SBu2Nor , T] = step(SSGBu2Nor , T) ;

% Respostas ao Impulso Segunda Ordem - Butterworth

[IBu2LP , T] = impulse(SSGBu2LP , T) ; [IBu2HP , T] = impulse(SSGBu2HP , T) ;
[IBu2Inv , T] = impulse(SSGBu2Inv , T) ; [IBu2Nor , T] = impulse(SSGBu2Nor , T) ;
```

% Respostas ao Degrau Segunda Ordem - Bessel

```
SGBE2LP = [tf([1],[1 sqrt(3) 1])] ; SSGBE2LP = ss(SGBE2LP) ; [SBE2LP , T] = step(SSGBE2LP , T) ;  
SGBE2HP = [tf([1 0 0],[1 sqrt(3) 1])] ; SSGBE2HP = ss(SGBE2HP) ; [SBE2HP , T] = step(SSGBE2HP, T) ;  
SGBE2Inv = [tf([-1 0 1],[1 sqrt(3) 1])] ; SSGBE2Inv = ss(SGBE2Inv) ; [SBE2Inv, T] = step(SSGBE2Inv ,T) ;  
SGBE2Nor = [tf([1 0 1],[1 sqrt(3) 1])] ; SSGBE2Nor = ss(SGBE2Nor) ; [SBE2Nor,T] = step(SSGBE2Nor,T) ;
```

% Respostas ao Impulso Segunda Ordem - Bessel

```
[IBe2LP , T] = impulse(SSGBE2LP , T) ; [IBe2HP , T] = impulse(SSGBE2HP , T) ;  
[IBe2Inv , T] = impulse(SSGBE2Inv , T) ; [IBe2Nor , T] = impulse(SSGBE2Nor , T) ;
```

% Respostas ao Degrau Segunda Ordem Linkwitz – Riley

```
SGLR2LP = [tf([1],[1 2 1])] ; SSGLR2LP = ss(SGLR2LP) ; [SLR2LP , T] = step(SSGLR2LP , T) ;  
SGLR2HP = [tf([1 0 0],[1 2 1])] ; SSGLR2HP = ss(SGLR2HP) ; [SLR2HP , T] = step(SSGLR2HP , T) ;  
SGLR2Inv = [tf([-1 0 1],[1 2 1])] ; SSGLR2Inv = ss(SGLR2Inv) ; [SLR2Inv , T] = step(SSGLR2Inv , T) ;  
SGLR2Nor = [tf([1 0 1],[1 2 1])] ; SSGLR2Nor = ss(SGLR2Nor) ; [SLR2Nor , T] = step(SSGLR2Nor , T) ;
```

% Respostas ao Impulso

```
[ILR2LP , T] = impulse(SSGLR2LP , T) ; [ILR2HP , T] = impulse(SSGLR2HP , T) ;  
[ILR2Inv , T] = impulse(SSGLR2Inv , T) ; [ILR2Nor , T] = impulse(SSGLR2Nor , T) ;
```

% Respostas ao Degrau Segunda Ordem - Chebychev

```
SGCh2LP = [tf([1],[1 1 1])] ; SSGCh2LP = ss(SGCh2LP) ; [SCh2LP , T] = step(SSGCh2LP , T) ;  
SGCh2HP = [tf([1 0 0],[1 1 1])] ; SSGCh2HP = ss(SGCh2HP) ; [SCh2HP , T] = step(SSGCh2HP , T) ;  
SGCh2Inv = [tf([-1 0 1],[1 1 1])] ; SSGCh2Inv = ss(SGCh2Inv) ; [SCh2Inv , T] = step(SSGCh2Inv , T) ;  
SGCh2Nor = [tf([1 0 1],[1 1 1])] ; SSGCh2Nor = ss(SGCh2Nor) ; [SCh2Nor , T] = step(SSGCh2Nor , T) ;
```

% Respostas ao Impulso Segunda Ordem - Chebychev

```
[ICh2LP , T] = impulse(SSGCh2LP , T) ; [ICh2HP , T] = impulse(SSGCh2HP , T) ;  
[ICh2Inv , T] = impulse(SSGCh2Inv , T) ; [ICh2Nor , T] = impulse(SSGCh2Nor , T) ;
```

% FIGURAS

% Fig 1

```
NF = 0 ;  
NF = NF+1 ;  
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente  
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente  
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente  
figure(NF) ; AXNA = axes ;  
FIGA = plot(T,SBu1LP, T,SBu1HP, T,SBu1Nor, T,SBu1Inv) ; grid on ;  
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura  
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
```

```

'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on');
ylim([-1 1.5]);
title('Resposta ao Degrau Butterworth de 1^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos');
ylabel('Amplitude em Volts');
LNF = legend ('\fontsize {10}LP', 'HP', 'LP + HP', 'LP - HP') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167],...
'Color','white','FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1.5 1 1] );

```

% Fig 2

```

NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,IBu1LP, T,IBu1HP, T,IBu1Nor, T,IBu1Inv) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on');
ylim([-1 2]);
title('Resposta ao Impulso Butterworth de 1^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos');
ylabel('Amplitude em Volts');
LNF = legend ('\fontsize {10}LP', 'HP', 'LP + HP', 'LP - HP') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167],...
'Color','white','FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1.5 1 1] );

```

% Respostas Ao Degrau Segunda Ordem

% Fig 3

```

NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,SCh2LP, T,SBu2LP, T,SBe2LP, T,SLR2LP) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on');
ylim([0 1.5]);
title('Respostas ao Degrau LP de 2^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos');
ylabel('Amplitude em Volts');
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167],...
'Color','white','FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1] );

```

% Fig 4

```
NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,SCh2HP, T,SBu2HP, T,SBe2HP, T,SLR2HP) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([-0.5 1]) ;
title('Respostas ao Degrau HP de 2a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos') ;
ylabel('Amplitude em Volts') ;
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167], ...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;
```

% Fig 5

```
NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,SCh2Nor, T,SBu2Nor, T,SBe2Nor, T,SLR2Nor) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([0 1.5]) ;
title('Respostas ao Degrau LP + HP de 2a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos') ;
ylabel('Amplitude em Volts') ;
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167], ...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;
```

% Fig 6

```
NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,SCh2Inv, T,SBu2Inv, T,SBe2Inv, T,SLR2Inv) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([-1 1.5]) ;
title('Respostas ao Degrau LP - HP de 2a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos') ;
```

```

ylabel('Amplitude em Volts');
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167],...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;

```

% Respostas Ao Impulso Segunda Ordem

% Fig 7

```

NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,ICh2LP, T,IBu2LP, T,IBe2LP, T,ILR2LP) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([-0.5 1]) ;
title('Respostas ao Impulso LP de 2^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos');
ylabel('Amplitude em Volts');
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167],...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;

```

% Fig 8

```

NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,ICh2HP, T,IBu2HP, T,IBe2HP, T,ILR2HP) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([-2 0.5]) ;
title('Respostas ao Impulso HP de 2^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos');
ylabel('Amplitude em Volts');
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167],...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;

```

% Fig 9

```
NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,ICh2Nor, T,IBu2Nor, T,IBe2Nor, T,ILR2Nor) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([-2 0.5]) ;
title('Respostas ao Impulso Nor de 2^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos') ;
ylabel('Amplitude em Volts') ;
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167], ...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;
```

% Fig 10

```
NF = NF+1 ;
FA = 'FA' ; FIGA = [FA NF] ; % Cria o Handle (FIG A) Automaticamente
L = 'L' ; LNF = [L NF] ; % Cria o Handle da Legenda (L NF) Automaticamente
AXA = 'AXA' ; AXNA = [AXA NF] ; % Cria o Handle dos Eixos AXNA automaticamente
figure(NF) ; AXNA = axes ;
FIGA = plot(T,ICh2Inv, T,IBu2Inv, T,IBe2Inv, T,ILR2Inv) ; grid on ;
set(FIGA,'LineWidth',1.5) ; % Largura da Linha da Figura
set(AXNA,'LineWidth',1, ...
    'GridLineStyle','-','MinorGridLineStyle','-','XMinorTick','on','YMinorTick','on') ;
ylim([-0.5 2]) ;
title('Respostas ao Impulso Inv de 2^a Ordem')
xlabel('Tempo em Segundos') ;
ylabel('Amplitude em Volts') ;
LNF = legend ('\fontsize {10}Ch', 'Bu', 'Be', 'LR') ;
set(LNF,'Position', [0.18 0.4 0.14 0.104167], ...
    'Color','white', 'FontSize', 10, 'LineWidth', 0.5, ...
    'PlotBoxAspectRatioMode','Manual', 'PlotBoxAspectRatio', [1 1 1]) ;
```

%

F I M